

Dany-Jack Mercier

Fondamentaux de géométrie pour les concours

(grandes écoles, CAPES, agrégation, ...)

Publibook

Retrouvez notre catalogue sur le site des Éditions Publibook :

<http://www.publibook.com>

Ce texte publié par les Éditions Publibook est protégé par les lois et traités internationaux relatifs aux droits d'auteur. Son impression sur papier est strictement réservée à l'acquéreur et limitée à son usage personnel. Toute autre reproduction ou copie, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon et serait passible des sanctions prévues par les textes susvisés et notamment le Code français de la propriété intellectuelle et les conventions internationales en vigueur sur la protection des droits d'auteur.

Éditions Publibook
14, rue des Volontaires
75015 PARIS – France
Tél. : +33 (0)1 53 69 65 55

IDDN.FR.010.0114274.000.R.P.2009.030.40000

Cet ouvrage a fait l'objet d'une première publication aux Éditions Publibook en 2009

Table des matières

Avant-propos	7
1 Espaces affines	9
1.1 Groupe opérant sur un ensemble	9
1.2 Espaces affines	10
1.3 Sous-espaces affines	12
1.4 Intersection de sous-espaces affines	14
1.5 S'il reste du temps...	16
2 Barycentres, repérage et convexité	19
2.1 Barycentres	19
2.1.1 Définitions et premières propriétés	19
2.1.2 Lien entre sous-espaces affines et barycentration	21
2.2 Repérage	22
2.2.1 Coordonnées cartésiennes	22
2.2.2 Coordonnées barycentriques	23
2.3 Convexité	24
3 Applications affines	27
3.1 Définitions	27
3.2 Propriétés	28
3.3 Convexité d'un demi-espace	32
3.4 S'il reste du temps...	35
4 Projections, symétries...	39
4.1 Rappels	39
4.2 Projections	40
4.3 Thalès et Ménélaüs	41
4.4 Symétries	44
4.5 Affinités	46
4.6 Transvections	47

5	Homothéties-translations	51
5.1	Quelques résultats d'algèbre linéaire	51
5.2	Définitions	52
5.3	Propriété fondamentale	54
5.4	Composition	56
5.5	Applications	57
5.5.1	Thalès dans le triangle	57
5.5.2	Parallélogrammes	58
5.5.3	Caractérisation des triangles homothétiques	58
5.5.4	Théorème de Ménélaüs	58
5.5.5	Propriété du trapèze	59
5.5.6	Configuration des trapèzes	59
5.5.7	Un cas particulier du Théorème de Pappus	60
5.6	S'il reste du temps...	62
6	Formes bilinéaires symétriques	63
6.1	Formes bilinéaires symétriques	63
6.1.1	Définitions, matrice	63
6.1.2	Changement de base	64
6.1.3	Application linéaire à gauche	64
6.1.4	Orthogonalité	65
6.1.5	Non dégénérescence	66
6.2	Formes quadratiques	67
6.2.1	Définitions	67
6.2.2	Expression dans une base	68
6.2.3	Signature d'une forme quadratique	69
6.3	Méthode de Gauss	71
6.4	Recherche des extrémums d'une fonction	71
6.5	S'il reste du temps...	74
7	Espaces vectoriels euclidiens	75
7.1	Définitions et premières résultats	75
7.2	Orthogonalité dans un espace euclidien	77
7.3	Projections et symétries orthogonales	79
7.4	Adjoint d'un endomorphisme	80
7.5	S'il reste du temps...	82
8	Applications orthogonales	83
8.1	Définitions	83
8.2	Propriétés	86
8.3	Applications orthogonales du plan	88

8.3.1	Recherche	88
8.3.2	Classification suivant l'espace des vecteurs invariants . .	89
8.3.3	Propriétés	89
8.4	Théorèmes de Cartan-Dieudonné	90
8.5	Applications orthogonales de l'espace	91
8.6	S'il reste du temps...	93
9	Angles orientés	95
9.1	Introduction	95
9.2	Orientation d'un espace vectoriel	97
9.3	Mesure d'une rotation	99
9.4	Angles orientés de vecteurs	100
9.4.1	Définitions et propriétés	100
9.4.2	Bissectrices de deux demi-droites	103
9.4.3	Expressions du sinus et du cosinus	104
9.5	Angles orientés de deux droites	104
9.5.1	Définitions et propriétés	104
9.5.2	Mesure d'un angle de droite	106
9.5.3	Bissectrice d'un couple de droites	106
9.5.4	Produit de deux réflexions	107
10	Isométries affines	109
10.1	Définitions et premiers résultats	109
10.2	Le Théorème fondamental	111
10.3	Nature des isométries du plan et de l'espace	112
10.4	S'il reste du temps...	113
11	Isométries affines : compléments	119
11.1	Détermination d'une isométrie	119
11.2	Cas d'égalités des triangles	121
11.3	Hyperplan médiateur d'un segment	124
11.4	Théorèmes de Cartan-Dieudonné	126
11.5	S'il reste du temps...	127
12	Coniques	129
12.1	Définition par foyer et directrice	129
12.1.1	Cas où $e \neq 1$	130
12.1.2	Cas où $e = 1$	134
12.2	Définition bifocale	137
12.2.1	Ellipse	137
12.2.2	Hyperbole	138

13 Similitudes	139
13.1 Similitudes vectorielles	139
13.1.1 Définitions	139
13.1.2 Caractérisation angulaire	140
13.1.3 Similitudes planes	141
13.1.4 Ecriture complexe d'une similitude vectorielle plane . .	142
13.2 Similitudes affines	142
13.2.1 Définitions	142
13.2.2 Théorème fondamental	143
13.2.3 Conséquences du Théorème fondamental	144
13.3 S'il reste du temps...	147
14 Compléments sur les coniques	149
14.1 Paramétrisations	149
14.2 Propriété générale des tangentes	150
14.3 Tangentes à une conique bifocale	153
14.4 Méthode du cercle directeur	154
14.5 Cercle principal d'une ellipse	156
14.6 Hyperbole rapportée à ses asymptotes	157
14.7 Equation polaire	158
14.8 S'il reste du temps...	160
15 Opérateurs symétriques et hermitiens	161
15.1 Diagonalisation des opérateurs hermitiens	161
15.2 Diagonalisation des opérateurs symétriques	162
15.3 Applications	163
15.3.1 Endomorphisme associé à une f. b. s.	163
15.3.2 Réduction d'une forme quadratique dans une b. o. . . .	164
15.3.3 Equations réduites de coniques ou de quadriques	165
15.3.4 Extrémums d'une fonction de 2 variables	165
15.3.5 Plus grande valeur propre d'une matrice symétrique . .	167
15.3.6 Norme d'une matrice symétrique	168
16 Compléments sur les similitudes	169
16.1 En dimension quelconque	169
16.2 Similitudes planes	170
16.2.1 Transformation des angles orientés	170
16.2.2 Ecriture complexe	171
16.2.3 Cas de similitude des triangles	172

Avant-propos

En seulement 16 chapitres, je vous propose de parcourir l'ensemble des connaissances de base en géométrie que tout candidat au CAPES ou à l'agrégation doit connaître parfaitement.

Ce fascicule est un OUTIL D'APPRENTISSAGE ET D'ENTRAÎNEMENT qui permet d'aller à l'essentiel, sans perte de temps inutile. Il regroupe les fondamentaux de géométrie. Cela signifie que tout y est important, et qu'il ne faut pas se contenter d'une lecture superficielle.

Les savoirs regroupés ici sont ESSENTIELS car ils :

- donnent au candidat les bases nécessaires pour réagir devant un problème de géométrie à l'écrit d'un concours ;
- permettent de répondre à un grand nombre de questions classiques que peut poser un jury d'oral à qui il s'agit de montrer sa maîtrise des fondamentaux.

Parmi les questions posées pendant un entretien, il en existe qui visent à assurer le jury que le candidat possède une bonne *maîtrise des fondamentaux* et *parvient à les expliquer clairement*. Ne pas savoir répondre à ces questions, y répondre mal ou de façon incomplète, est souvent à l'origine d'un échec.

A l'opposé, un candidat averti qui connaît ses bases saura répondre avec précision et rigueur, et s'attachera la sympathie du jury.

Il faut donc travailler ces fondamentaux jusqu'à les faire siens et devenir capable de les expliquer à un tiers, ce qui permet d'éviter d'être recalé à cause d'une note éliminatoire reçue à l'oral sur des questions somme toute assez prévisibles. En voici quelques unes qui trouveront une réponse claire dans ce livre :

- Comment montrer que deux applications affines sont égales ? (Th. 15) ;
- Que dire des points invariants par une application affine ? (Th. 19) ;
- Comment montrer qu'une projection affine... est affine ? (Th. 29) ;
- Comment prouver le Théorème de Ménélaüs en utilisant le Théorème de Thalès, puis montrer sa réciproque ? (Th. 33) ;
- Une application du plan dans lui-même qui transforme toute droite en une droite parallèle est-elle forcément une homothétie-translation ? Que se passe-t-il en dimension n ? (Th. 47) ;

- Une isométrie d'un espace affine euclidien est-elle affine ? (Th. 120) ;
- Pouvez-vous donner le catalogue de toutes les isométries affines de l'espace ? (FIG. 10.4) ;

et il en reste tant à poser sur les leçons de ce fascicule...

Le contenu proposé dans les pages qui suivent est une adaptation du matériel qui figure déjà dans mon "Cours de Géométrie" [8], mais ce fascicule se lit indépendamment de son grand frère. Toutes les démonstrations des théorèmes centraux du programme sont données (et il est presque toujours conseillé de retenir à la fois l'énoncé et sa démonstration), tandis que d'autres résultats, moins prioritaires, sont cités sans démonstration¹.

L'origine de ce livre est un cours magistral que j'avais l'habitude de donner en préparation au CAPES à l'IUFM de Guadeloupe de 1991 à 2008. Il correspondait à un peu plus d'une trentaine d'heures de cours, pour environ 2h par chapitre.

Actuellement, je teste une autre façon de procéder : je distribue ce fascicule en début de préparation en demandant de le travailler, puis j'utilise la trentaine d'heures en salle pour poser toutes sortes de questions à son sujet et revenir sur ces points capitaux. Si les pratiques changent, les savoirs demeurent.

Vous aussi, n'hésitez pas à revenir sur ces contenus pour les posséder complètement, et si vous préparez le concours à plusieurs, lancez-vous dans un jeu de questions/réponses sur chacun des chapitres. Il est important d'arriver à créer son propre "vécu mathématiques" et à JOUER suffisamment avec ces notions pour les posséder parfaitement.

Ce livre est une invitation à posséder l'essentiel ! Prêts ? Partez...

Dany-Jack Mercier²
Pointe-à-Pitre, ce 7 juin 2009

¹Certains chapitres se terminent par une Section intitulée "S'il reste du temps". On y trouvera des prolongements, des questions supplémentaires... Il va sans dire que l'on peut laisser ces compléments de côté en première lecture.

²Pour me contacter : dany-jack.mercier@hotmail.fr. Visitez aussi le site MégaMaths pour profiter des documents que je propose en accès libre, des bonus et des nombreux commentaires sur les concours. Tapez "megamaths dany-jack" dans votre moteur de recherche favori : bonne visite !

Chapitre 1

Espaces affines

1.1 Groupe opérant sur un ensemble

Définition 1 Une groupe $(G, .)$ opère sur un ensemble E s'il existe une application

$$\begin{aligned} G \times E &\longrightarrow E \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

telle que

- 1) $\forall x \in E \quad ex = x,$
- 2) $\forall g, g' \in G \quad \forall x \in E \quad g(g'x) = (gg')x.$

On dit aussi que G agit sur E , ou bien que l'on a une **action du groupe G** sur l'ensemble E .

Si G opère sur E , l'application $f_g : E \longrightarrow E$ définie par $f_g(x) = gx$ est bijective puisque l'équation $gx = y$ équivaut à $x = g^{-1}y$. Il est alors facile de vérifier que l'on a la définition équivalente suivante :

Définition 2 Une groupe $(G, .)$ opère sur un ensemble E s'il existe un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathcal{S}(E) \\ g &\longmapsto f_g \end{aligned}$$

du groupe G dans le groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ des permutations de E .

Cette deuxième définition montre en particulier que n'importe quel sous-groupe G du groupe des permutations de E opère sur E . Par exemple :

- a) le groupe des isométries d'un espace affine euclidien E agit sur cet espace,
- b) le groupe des rotations planes de centre Ω donné opère sur l'ensemble E des triangles non aplatis du plan (faire un dessin).

c) le groupe des homothéties-translations opère sur l'ensemble des droites d'un plan.

Dans ces trois exemples, l'application $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}(E)$ est l'inclusion canonique. Elle est donc injective et l'on dit que l'action de groupe est fidèle. Plus généralement, on pose :

Définition 3 Soit G un groupe opérant sur un ensemble E .

1) G opère **transitivement** si pour tous $x, y \in E$ il existe un élément g de G tel que $y = gx$.

2) G opère **simplement** si pour tous $x, y \in E$ il existe au plus un élément g de G tel que $y = gx$.

3) G opère **fidèlement** si l'application $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}(E) ; g \longmapsto f_g$ est injective.

Théorème 1 {[8], Théorème 1} Un groupe commutatif G opère simplement et transitivement sur un ensemble si et seulement si il opère fidèlement et transitivement sur ce même ensemble.

1.2 Espaces affines

Définition 4 On appelle **espace affine de direction** \vec{E} tout ensemble E sur lequel le groupe additif $(\vec{E}, +)$ de l'espace vectoriel \vec{E} opère simplement et transitivement.

Puisque le groupe additif $(\vec{E}, +)$ est commutatif, le Théorème 1 montre que l'on peut remplacer "simplement" par "fidèlement" dans la Définition précédente.

On dit que E est un **espace affine sur** K lorsque \vec{E} est un espace vectoriel sur un corps commutatif K . Nous travaillerons surtout lorsque $K = \mathbb{R}$.

L'action du groupe additif $(\vec{E}, +)$ est traditionnellement notée "à droite", et la donnée d'un espace affine E est donc celle d'une application

$$\begin{aligned} E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ (M, \vec{u}) &\longmapsto M + \vec{u} \end{aligned}$$

appelée "**loi externe**", satisfaisant les trois axiomes :

A1. $\forall M \in E \quad M + \vec{0} = M,$

A2. $\forall M \in E \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E} \quad (M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v}),$

A3. $\forall M, N \in E \quad \exists! \vec{u} \in \vec{E} \quad M + \vec{u} = N.$

Le vecteur \vec{u} vérifiant l'axiome **A3** est noté commodément \overrightarrow{MN} ou encore $N - M$. Toutes les propriétés d'un espace affine se déduisent de ces trois axiomes. Citons :

1) La relation de Chasles : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ pour tous points M, N, P de E . En effet, $M + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}) = (M + \overrightarrow{MN}) + \overrightarrow{NP} = N + \overrightarrow{NP} = P$.

2) La relation de Chasles permet d'écrire $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$, et l'on en déduit $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Cela s'écrit $M + \vec{0} = M$ et montre que les axiomes **A2** et **A3** entraînent l'axiome **A1**. Le système d'axiomes **A1, A2, A3** est redondant et **A1** peut être supprimé dans la définition générale d'un espace affine.

3) On a $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ si et seulement si $M = N$. L'égalité $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ a déjà été prouvée et correspond à l'axiome **A1**. Réciproquement $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ entraîne $M = M + \vec{0} = M + \overrightarrow{MN} = N$.

4) On a $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$ puisque $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

5) Dans l'égalité $M + \vec{u} = N$, la donnée de deux éléments détermine entièrement le troisième. Plus précisément

$$M + \vec{u} = N \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow M = N + (-\vec{u}),$$

et ces équivalences expliquent pourquoi l'on définit parfois les opérations bien commodes $N - M = \overrightarrow{MN}$ et $N - \vec{u} = N + (-\vec{u})$.

6) L'axiome **A3** signifie que, pour tout $M \in E$, l'application

$$\varphi_M : \begin{array}{ccc} \vec{E} & \longrightarrow & E \\ \vec{u} & \longmapsto & M + \vec{u} \end{array}$$

est bijective. Une fois le point M choisi, un espace affine est, du point de vue ensembliste, parfaitement identique à son espace vectoriel associé. Cette bijection permettra de structurer E en espace vectoriel après avoir choisi le point M , comme on le reverra à la Section 3.1.

Remarques : 1) On peut fixer $\vec{u} \in \vec{E}$ et définir l'application

$$t_{\vec{u}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \vec{u}. \end{array}$$

On obtient une bijection appelée **translation de vecteur** \vec{u} . Compte tenu de la Définition 2, se donner un espace affine revient à se donner un ensemble E , un espace vectoriel \vec{E} , et un sous-groupe $T = \{t_{\vec{u}} / \vec{u} \in \vec{E}\}$ du groupe des permutations de E pour lesquels il existe un isomorphisme de groupes

$$\varphi : (\vec{E}, +) \rightarrow (T, \circ).$$

La définition des translations sur E est donc intimement liée à la structure d'espace affine de E .

2) On peut définir un espace affine en utilisant d'autres systèmes d'axiomes, par exemple, en annonçant l'existence d'une application

$$\begin{aligned} \psi : E \times E &\longrightarrow \vec{E} \\ (M, N) &\longmapsto \overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

telle que

$$\mathbf{B1.} \quad \forall M, N, P \in E \quad \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} \quad (\text{Relation de Chasles}),$$

$\mathbf{B2.}$ Pour tout point M de E , l'application

$$\begin{aligned} \psi_M : E &\longrightarrow \vec{E} \\ N &\longmapsto \overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

est bijective.

L'équivalence entre les systèmes d'axiomes \mathbf{A} et \mathbf{B} est vérifiée en [8], § 1.2.

1.3 Sous-espaces affines

Une partie F de E est un **sous-espace affine de E** s'il est non vide et lui-même structuré en espace affine de direction un sous-espace vectoriel \vec{F} de \vec{E} pour la restriction de la loi externe $E \times \vec{E} \rightarrow E$. Cette restriction est

$$\begin{aligned} F \times \vec{F} &\longrightarrow F \\ (M, \vec{u}) &\longmapsto M + \vec{u} \end{aligned}$$

et si $A \in F$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \vec{F} &\longrightarrow F \\ \vec{u} &\longmapsto A + \vec{u} \end{aligned}$$

est bijective. On en déduit $F = \{A + \vec{u} / \vec{u} \in \vec{F}\} = \{M \in E / \overrightarrow{AM} \in \vec{F}\}$, et l'on pose naturellement $A + \vec{F} = \{A + \vec{u} / \vec{u} \in \vec{F}\}$.

Réciproquement, vérifions que l'ensemble $F = A + \vec{F}$ est bien structuré en espace affine pour la restriction de $E \times \vec{E} \rightarrow E$. Tout d'abord l'application $F \times \vec{F} \rightarrow F$ est bien définie puisque, si $M = A + \vec{v} \in A + \vec{F}$ et $\vec{u} \in \vec{F}$, le point $M + \vec{u} = (A + \vec{v}) + \vec{u} = A + (\vec{v} + \vec{u})$ appartient bien à $A + \vec{F}$.

Les axiomes $\mathbf{A1}$ et $\mathbf{A2}$, vérifiés pour E , le seront a fortiori pour F . Seul l'axiome $\mathbf{A3}$ reste à montrer. Si M et N appartiennent à F , il existe un

unique vecteur \vec{u} dans \vec{E} tel que $M + \vec{u} = N$, et il s'agit de prouver que \vec{u} appartient à \vec{F} . Par définition de F , $\overrightarrow{AM} \in \vec{F}$ et $\overrightarrow{AN} \in \vec{F}$, d'où

$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \in \vec{F}$$

puisque \vec{F} est un sous-espace vectoriel. En conclusion :

Théorème 2 *F est un sous-espace affine de E si et seulement si il existe un point A de E et un sous-espace vectoriel \vec{F} de \vec{E} tels que $F = A + \vec{F}$.*

Définition 5 *L'ensemble $A + \vec{F}$ est appelé sous-espace affine passant par A et de direction \vec{F} .*

Théorème 3

- 1) $\forall B \in A + \vec{F} \quad A + \vec{F} = B + \vec{F}$,
- 2) $A + \vec{F} \subset B + \vec{G} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \vec{G} \text{ et } \vec{F} \subset \vec{G}$,
- 3) $A + \vec{F} = B + \vec{G} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \vec{G} \text{ et } \vec{F} = \vec{G}$.

Preuve : 1) Comme par hypothèse $\overrightarrow{AB} \in \vec{F}$,

$$\begin{aligned} M \in A + \vec{F} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{F} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \in \vec{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \in \vec{F} \Leftrightarrow M \in B + \vec{F}. \end{aligned}$$

2) (\Rightarrow) : L'hypothèse $A \in B + \vec{G}$ entraîne $\overrightarrow{AB} \in \vec{G}$. Si $\vec{u} \in \vec{F}$, posons $M = A + \vec{u}$.

$$M = A + \vec{u} \in A + \vec{F} \subset B + \vec{G} \Rightarrow \overrightarrow{BM} \in \vec{G}.$$

Comme $\overrightarrow{AB} \in \vec{G}$ on déduit $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \in \vec{G}$ et cela prouve l'inclusion $\vec{F} \subset \vec{G}$.

(\Leftarrow) : Si $M \in A + \vec{F}$, $\overrightarrow{AM} \in \vec{F} \subset \vec{G}$ donc $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \vec{G}$ comme somme de deux vecteurs de \vec{G} . Cela signifie que $M \in B + \vec{G}$.

3) est une conséquence directe de 2), puisque

$$\begin{aligned} A + \vec{F} = B + \vec{G} &\Leftrightarrow \begin{cases} A + \vec{F} \subset B + \vec{G} \\ B + \vec{G} \subset A + \vec{F} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \in \vec{G} \text{ et } \vec{F} \subset \vec{G} \\ \overrightarrow{BA} \in \vec{F} \text{ et } \vec{G} \subset \vec{F} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in \vec{G} \text{ et } \vec{F} = \vec{G}. \blacksquare \end{aligned}$$

L'assertion 3) du Théorème 3 montre que la direction d'un sous-espace affine est unique et nous permet de définir les notions de dimension et de parallélisme :

Définition 6 La *dimension d'un sous-espace affine* $F = A + \vec{F}$ est par définition celle de sa direction \vec{F} . On note $\dim F = \dim \vec{F}$.

Définition 7 Deux sous-espaces affines F et G sont **parallèles** s'ils ont la même direction, autrement dit si $\vec{F} = \vec{G}$. On note alors $F // G$.

► Il est facile de voir que la relation de parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sous-espaces affines de E , et que l'ensemble-quotient correspondant est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \vec{E} .

► Il est aussi facile de démontrer les deux axiomes suivants d'Euclide¹ :

Postulat 1 : "Par deux points distincts, il passe une et une seule droite".

Postulat 5 : "Par un point extérieur à une droite, il passe une droite et une seule parallèle à la droite donnée".

► On fera toutefois attention à la relation de "parallélisme faible" qui n'est pas une relation d'équivalence : si F et G sont deux sous-espaces affines, on dit que F est **faiblement parallèle à G** si $\vec{F} \subset \vec{G}$, et l'on note alors $F < // G$.

Théorème 4 {[8], Th. 4} (**Caractérisation d'un sous-espace affine**)

Soit F une partie non vide de E et $A \in F$.

1) F est un sous-espace affine si et seulement si la partie $\{\overrightarrow{AM} / M \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E} .

2) Si F est un sous-espace affine, alors $\{\overrightarrow{MN} / M, N \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E} .

3) Si F est un sous-espace affine, sa direction est

$$\vec{F} = \{\overrightarrow{AM} / M \in F\} = \{\overrightarrow{MN} / M, N \in F\}.$$

Remarque : La réciproque de l'assertion 2) du Théorème ci-dessus est fautive. Si F désigne une demi-droite fermée, $\{\overrightarrow{MN} / M, N \in F\}$ est une droite vectorielle sans que F soit un sous-espace affine. Dans ce cas on a l'inclusion stricte $\{\overrightarrow{AM} / M \in F\} \subsetneq \{\overrightarrow{MN} / M, N \in F\}$.

1.4 Intersection de sous-espaces affines

Théorème 5 L'intersection d'une famille de sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions.

¹Preuves proposées en [8] après la Définition 7.