

D.-J. Mercier – J.-E. Rombaldi

Annales 2009
CAPES externe, interne
& Agrégation interne de mathématiques

5 problèmes corrigés, avec des solutions détaillées
et un complément de cours sur les coniques

Publibook

Retrouvez notre catalogue sur le site des Éditions Publibook :

<http://www.publibook.com>

Ce texte publié par les Éditions Publibook est protégé par les lois et traités internationaux relatifs aux droits d'auteur. Son impression sur papier est strictement réservée à l'acquéreur et limitée à son usage personnel. Toute autre reproduction ou copie, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon et serait passible des sanctions prévues par les textes susvisés et notamment le Code français de la propriété intellectuelle et les conventions internationales en vigueur sur la protection des droits d'auteur.

Éditions Publibook
14, rue des Volontaires
75015 PARIS – France
Tél. : +33 (0)1 53 69 65 55

IDDN.FR.010.0114119.000.R.P.2009.030.40000

Cet ouvrage a fait l'objet d'une première publication aux Éditions Publibook en 2009

Table des matières

Avant-propos	5
1 CAPES interne	7
1.1 Énoncé	7
1.2 Corrigé	19
2 CAPES externe, épreuve 1	41
2.1 Énoncé	41
2.2 Corrigé	53
3 CAPES externe, épreuve 2	93
3.1 Énoncé	93
3.2 Corrigé	101
3.3 Compléments	124
3.3.1 Nombre de tangentes à une conique issues d'un point . .	125
3.3.2 Les théorèmes de Poncelet	130
3.3.3 Une symétrie gauche qui conserve l'ellipse	133
3.3.4 Ellipse de Steiner	135
4 Agrégation interne, épreuve 1	139
4.1 Énoncé	139
4.2 Corrigé	147
5 Agrégation interne, épreuve 2	179
5.1 Énoncé	179
5.2 Corrigé	187

Avant-propos

Voici cinq problèmes de concours de l'année 2009 : ceux du CAPES interne, du CAPES externe et de l'agrégation interne, avec les solutions détaillées que nous avons travaillées, et un complément de 13 pages sur les coniques (comprenant les énoncés et les preuves des deux théorèmes de Poncelet, ainsi que la preuve de l'existence et de l'unicité de l'ellipse de Steiner d'un triangle).

Ces concours sont suffisamment proches pour être rassemblés dans un seul volume, et un candidat qui prépare l'un d'eux aura tout intérêt à s'entraîner sur ces cinq problèmes. Un recueil d'annales ciblées est l'occasion de mettre en pratique toutes les connaissances acquises pendant les longues années d'entraînement. C'est un outil de travail à la disposition du candidat.

Si vous avez acheté ce recueil d'annales, ou un autre de nos livres parus chez Publibook, sachez que vous pouvez nous demander deux annales corrigées supplémentaires de votre choix portant sur l'un de ces trois concours, parmi celles que nous avons déjà corrigées. Pour cela, il suffit de se connecter sur le site internet *MégaMaths*¹ et de cliquer sur le lien "Bonus". Voilà une façon originale de compléter sa collection de problèmes corrigés et continuer son entraînement sur des problèmes récents.

De nombreux documents en accès libre vous attendent aussi sur Méga-Maths : corrigés d'annales gratuits, documents de préparation aux oraux des concours, cours et articles de synthèse sur des thèmes importants des mathématiques, etc. Vous êtes les bienvenus sur ce site :))))))

Que dire de plus, si ce n'est vous souhaiter beaucoup d'énergie et de joie à vous lancer dans ces problèmes, et, à terme, toute la réussite dans vos projets personnels !

D.-J. Mercier & J.-E. Rombaldi
le 4 avril 2009.

⁰[cmonannales2009] v1.00

⁰La photographie de la couverture est de Dany-Jack Mercier, et fait partie de sa collection "Arrêts sur image de Fréjus à Saint-Raphaël" (<http://astrapios.spaces.live.com/>).

¹Le plus simple est sans doute de taper "megamaths dany-jack" dans un moteur de recherche. L'adresse du site en 2009 est : <http://megamaths.perso.neuf.fr/>. Bien entendu, cette offre peut disparaître sans préavis : renseignez-vous !

Chapitre 1

CAPES interne

1.1 Énoncé

PROBLEME 1 : LE THEOREME DE MORLEY

C'est un théorème qui permet de fabriquer de la symétrie à partir de rien. Il a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : « Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral ».

Ce problème en propose trois démonstrations différentes. Les trois parties sont indépendantes et les résultats de l'une ne peuvent donc pas être utilisés dans l'autre.

Notations — On travaille dans le plan affine euclidien. Si O , A et B sont trois points du plan (avec $A \neq O$ et $B \neq O$), on note \widehat{AOB} (ou \widehat{BOA} , ou même \widehat{O} s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0; \pi]$) délimité par les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.

Par abus de notation, on note encore \widehat{AOB} la mesure en radians de l'angle \widehat{AOB} .

Soit d une droite du plan passant par O , on dira que d est une trisectrice de l'angle géométrique \widehat{AOB} si et seulement s'il existe un point M de d , distinct de O , tel que

$$\widehat{AOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB} \quad \text{ou} \quad \widehat{AOM} = \frac{2}{3}\widehat{AOB}$$

(de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices).

La distance entre deux points A et B est notée AB .

⁰[ag76e] v1.01

PARTIE A : Première démonstration

I. Préliminaires

Soit ABC un triangle non plat.

1. Construire à la règle et au compas le centre du cercle inscrit au triangle ABC , noté I . On laissera apparentes toutes les lignes de construction.

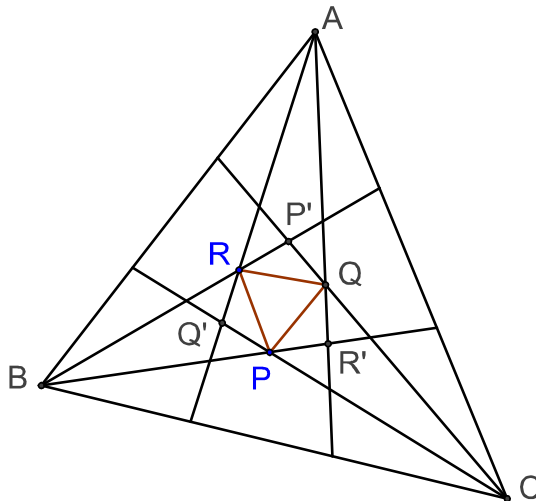
2. Prouver l'égalité : $\widehat{BIC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$.

3. On note A_1 le point d'intersection de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet A avec le segment $[BC]$. Prouver que si J est un point intérieur au triangle ABC , situé sur la bissectrice issue de A (c'est-à-dire un point du segment $[AA_1]$) vérifiant l'égalité $\widehat{BJC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}$ alors le point J est confondu avec le point I .

II. Construction auxiliaire

Soit PQR un triangle équilatéral et soient u, v, w trois nombres réels de l'intervalle $]0; \pi/3[$ tels que $u + v + w = \frac{2\pi}{3}$. On construit sur les côtés du triangle PQR , et à l'extérieur de ce triangle, trois triangles :

- ◆ $P'QR$ isocèle en P' et dont les angles à la base ont pour mesure u ,
- ◆ $PQ'R$ isocèle en Q' et dont les angles à la base ont pour mesure v ,
- ◆ PQR' isocèle en R' et dont les angles à la base ont pour mesure w .



1.1. Calculer $\widehat{Q'RQ} + \widehat{R'QR}$ en fonction de u .

1.2 Montrer que les droites (QR') et $(Q'R)$ sont sécantes. On notera A leur point d'intersection. On notera de même B le point d'intersection des droites (RP') et $(R'P)$ et C le point d'intersection des droites (PQ') et $(P'Q)$. Dans la suite de la partie A on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1.3. Montrer que $\widehat{Q'PB} = u$. En déduire la valeur de $\widehat{CPR'}$. De même, on montre que $\widehat{R'QC} = v$ et $\widehat{P'RA} = w$ et on en déduit la valeur de $\widehat{AQP'}$ et de $\widehat{BRQ'}$.

2.1. Montrer que la droite (PP') est une des médiatrices du triangle $P'RQ$.

2.2. En déduire que (PP') est une bissectrice du triangle $BP'C$.

3.1. Écrire \widehat{BPC} et $\widehat{BP'C}$ en fonction de u .

3.2. Montrer que $\widehat{BPC} = \frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{BP'C}}{2}$.

4. Montrer que P appartient aux bissectrices des angles $\widehat{P'BC}$ et $\widehat{P'CB}$. De même, on montre que Q appartient aux bissectrices des angles $\widehat{Q'CA}$ et $\widehat{Q'AC}$, et que R appartient aux bissectrices des angles $\widehat{R'AB}$ et $\widehat{R'BA}$.

5. Dresser, en la justifiant, la liste des six trisectrices du triangle ABC .

6. Donner les mesures des angles \widehat{CAB} , \widehat{ABC} et \widehat{BCA} en fonction de u, v, w .

III. Démonstration du théorème

Soient $A_1B_1C_1$ un triangle non plat et u, v, w les réels définis par les relations suivantes : $\widehat{A_1} = \pi - 3u$, $\widehat{B_1} = \pi - 3v$, $\widehat{C_1} = \pi - 3w$.

1. Calculer $u + v + w$.

2. Soit PQR un triangle équilatéral quelconque. La construction de la question II, à partir du triangle PQR et des valeurs de u, v et w ici définies, aboutit à un triangle ABC . Justifier que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

3. Démontrer le théorème de Morley.

PARTIE B : Deuxième démonstration

I. La relation des sinus

Soit ABC un triangle non plat, O le centre de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle circonscrit. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

1. Montrer que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2r$.

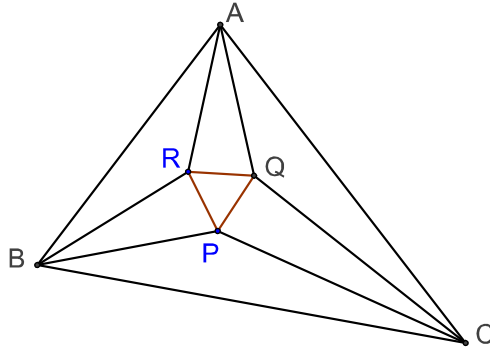
(On distinguera les cas $\widehat{A} < \pi/2$, $\widehat{A} = \pi/2$ et $\widehat{A} > \pi/2$.)

2. En déduire la relation dite des sinus :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r.$$

II. Démonstration du théorème de Morley

Soit ABC un triangle non plat quelconque. On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets B et C, C et A, A et B , tels que définis par la figure ci-dessous. Soient α, β, γ les réels définis par $\widehat{A} = 3\alpha, \widehat{B} = 3\beta, \widehat{C} = 3\gamma$.



Dans la suite de la partie B on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1. En appliquant la relation des sinus aux triangles ABR et ABC , montrer que :

$$AR = 2r \sin \beta \frac{\sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

2. Montrer que, pour tout nombre réel θ , on a la relation suivante :

$$\sin 3\theta = \sin \theta(4 \cos^2 \theta - 1).$$

On rappelle que, pour tout couple de réels (p, q) , on a la relation suivante :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}.$$

3. Montrer que :

$$4 \sin \gamma \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) = \frac{\sin(3\alpha + 3\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

4. Montrer que : $AR = 8r \sin \beta \sin \gamma \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right).$

5. En déduire que : $AQ = 8r \sin \beta \sin \gamma \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right)$

et que :
$$\frac{AR}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right)} = \frac{AQ}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right)} = 8r \sin \beta \sin \gamma.$$

6. On considère le point M de la demi-droite $[AQ)$ vérifiant $\widehat{ARM} = \frac{\pi}{3} + \beta$.

6.1. Calculer \widehat{AMR} .

6.2. En appliquant la relation des sinus dans le triangle ARM , montrer que $AM = AQ$.

6.3. Montrer que les points M et Q sont confondus.

6.4. Prouver les égalités suivantes :

$$\widehat{ARQ} = \frac{\pi}{3} + \beta \quad \text{et} \quad \widehat{AQR} = \frac{\pi}{3} + \gamma.$$

7. Montrer que $RQ = 8r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

8. Conclure.

PARTIE C : Troisième démonstration

La démonstration qui suit est basée sur un article d'Alain Connes datant de 1998 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Chaque point $M(x, y)$ du plan est aussi repéré par son affixe, c'est-à-dire le nombre complexe $z = x + iy$. Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nuls, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Le complexe égal à $\exp(2i\pi/3)$ est noté j .

I. Préliminaires

1. Résoudre l'équation $z^3 - 1 = 0$ dans \mathbb{C} .

2. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

3. On considère trois points P, Q, R du plan complexe d'affixes respectifs p, q, r . Prouver que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté (\vec{PQ}, \vec{PR}) de mesure principale égale à $\pi/3$, si et seulement si $p + jq + j^2r = 0$. Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral direct.

4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté (\vec{PQ}, \vec{PR}) de mesure principale égale à $-\pi/3$, si et seulement si $p + j^2q + jr = 0$. Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral indirect.

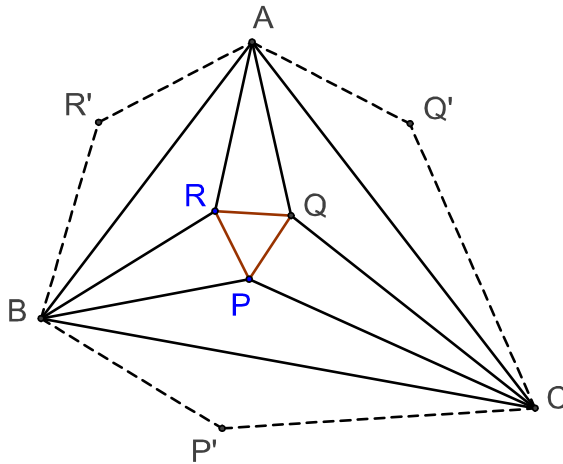
II. Généralités

On considère un triangle non plat ABC que l'on suppose direct c'est-à-dire tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit comprise strictement entre 0 et π .

On note 3α , 3β et 3γ les mesures principales respectives des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle $]0; \pi]$.

On note P , Q , R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets adjacents B et C , C et A , A et B , tels que définis par la figure ci-dessous.

On note P' , Q' et R' les symétriques des points P , Q , R respectivement par



rapport aux droites (BC) , (AC) et (AB) , et A' le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .

On rappelle qu'une rotation de centre Ω et d'angle θ ($\theta \in]0; 2\pi[$) est une similitude directe de centre Ω , de rapport 1 et d'angle θ .

On appelle f la rotation de centre A et d'angle 2α , g la rotation de centre B et d'angle 2β et h la rotation de centre C et d'angle 2γ .

1. Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'})$.

2. Montrer que P est un point fixe de la transformation $g \circ h$, R un point fixe de la transformation $f \circ g$ et Q un point fixe de la transformation $h \circ f$.

III. Quelques calculs numériques

Soit M un point du plan d'affixe z et φ une transformation du plan. Par abus de langage on note encore $\varphi(z)$ l'affixe du point $\varphi(M)$.