

L. Chélamie, D. Hoareau, R. Rolland, J.-E. Rombaldi, A. de Saint Julien

Sous la direction de

Dany-Jack Mercier

Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours

Volume 1

Publibook

Retrouvez notre catalogue sur le site des Éditions Publibook :

<http://www.publibook.com>

Ce texte publié par les Éditions Publibook est protégé par les lois et traités internationaux relatifs aux droits d'auteur. Son impression sur papier est strictement réservée à l'acquéreur et limitée à son usage personnel. Toute autre reproduction ou copie, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon et serait passible des sanctions prévues par les textes susvisés et notamment le Code français de la propriété intellectuelle et les conventions internationales en vigueur sur la protection des droits d'auteur.

Éditions Publibook
14, rue des Volontaires
75015 PARIS – France
Tél. : +33 (0)1 53 69 65 55

IDDN.FR.010.0113486.000.R.P.2009.030.40000

Cet ouvrage a fait l'objet d'une première publication aux Éditions Publibook en 2009

L. Chélamie

L'apprentissage de l'autonomie devant un énoncé mathématique en classe de sixième.

D. Hoareau

Histoires de groupes.

D.-J. Mercier

Introduction aux espaces projectifs, preuves des théorèmes de Pappus et de Desargues, dualité.

D.-J. Mercier

Polyèdres eulériens et solides pathologiques.

R. Rolland

Outils élémentaires de l'analyse.

J.-E. Rombaldi

Accélération de la convergence des suites réelles.

A. de Saint Julien

Matrices toutes puissantes.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Préface | 9 |
| Avant-propos | 11 |
| 1 L'apprentissage de l'autonomie en sixième | 15 |
| 1.1 Introduction | 16 |
| 1.2 Quelques définitions... | 18 |
| 1.2.1 La consigne | 18 |
| 1.2.2 L'énoncé mathématique | 19 |
| 1.2.3 Propriétés de l'énoncé | 19 |
| 1.3 Difficultés rencontrées par les élèves | 20 |
| 1.3.1 « Madame, je ne comprends pas ! » | 20 |
| 1.3.2 Le découragement et la peur d'être jugé | 21 |
| 1.3.3 Les difficultés liées à la langue française | 23 |
| 1.3.4 Le vocabulaire | 24 |
| 1.3.5 Les conjonctions de coordination | 25 |
| 1.4 Le langage mathématique | 25 |
| 1.4.1 Un vocabulaire et des notations spécifiques | 25 |
| 1.4.2 Un langage spécifique. | 25 |
| 1.4.3 Complexité de l'énoncé. | 26 |
| 1.4.4 Difficultés liées aux problèmes numériques | 27 |
| 1.5 L'approche expérimentale | 27 |
| 1.5.1 Le petit dictionnaire | 28 |
| 1.5.2 Les figures « téléphonées » | 31 |
| 1.5.3 La reformulation par les élèves | 37 |
| 1.5.4 Emploi d'un brouillon | 38 |
| 1.5.5 Localisation des « hypothèses » et de la « tâche » | 41 |
| 1.5.6 Fiches méthodologiques. | 43 |
| 1.6 Conclusion | 45 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2 | Histoires de groupes | 49 |
| 2.1 | Division euclidienne dans \mathbb{Z} | 50 |
| 2.1.1 | Sous-groupes de \mathbb{Z} , congruence dans \mathbb{Z} | 50 |
| 2.1.2 | Le modèle \mathbb{Z} | 51 |
| 2.1.3 | Ordre d'un élément | 51 |
| 2.1.4 | Groupe cyclique | 52 |
| 2.2 | Théorème de Lagrange | 53 |
| 2.2.1 | Dans un groupe abélien fini | 53 |
| 2.2.2 | Relation modulo un sous-groupe | 53 |
| 2.2.3 | Congruence dans \mathbb{Z} | 56 |
| 2.2.4 | Indicatrice d'Euler | 57 |
| 2.2.5 | Groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ quand p est premier | 60 |
| 2.3 | Conjugaison and co | 61 |
| 2.3.1 | Sous-groupe distingué | 61 |
| 2.3.2 | Centre d'un groupe | 65 |
| 2.3.3 | Equation des classes | 66 |
| 2.3.4 | Groupes-quotients | 67 |
| 2.4 | A propos de \mathcal{A}_5 | 68 |
| 2.4.1 | Centres de \mathcal{S}_n et de \mathcal{A}_n | 68 |
| 2.4.2 | Groupe dérivé de \mathcal{A}_5 | 68 |
| 2.4.3 | Simplicité de \mathcal{A}_5 | 69 |
| 2.4.4 | Sous-groupes distingués de \mathcal{S}_5 | 70 |
| 2.5 | Carrés non nuls du corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ | 71 |
| 2.5.1 | Morphisme de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sur $\{-1, 1\}$ | 72 |
| 2.5.2 | Un paramétrage de K | 72 |
| 2.5.3 | Comment reconnaître les carrés ? | 72 |
| 2.5.4 | Symbole de Zolotareff | 73 |
| 2.6 | Groupes d'ordre p^2 | 74 |
| 2.6.1 | Détermination des groupes d'ordre 4 | 74 |
| 2.6.2 | Détermination des groupes d'ordre 9 | 77 |
| 2.6.3 | Cas général | 77 |
| 2.6.4 | Réciproque de Lagrange dans les p -groupes | 78 |
| 2.7 | Théorème de Dixon | 79 |
| 2.7.1 | Dans \mathcal{S}_3 | 79 |
| 2.7.2 | Théorème | 79 |
| 2.7.3 | Constante optimale | 80 |
| 2.8 | Théorème de Cauchy | 81 |
| 2.8.1 | Groupes d'exposant 2 | 81 |
| 2.8.2 | Groupes diédraux | 82 |
| 2.8.3 | Une parenthèse : Détermination des groupes d'ordre 8 | 84 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.8.4 | Cas d'un groupe abélien | 86 |
| 2.8.5 | Groupes d'ordre pair | 87 |
| 2.8.6 | Cas général | 92 |
| 3 | Introduction aux espaces projectifs | 95 |
| 3.1 | Introduction | 96 |
| 3.2 | Définitions | 98 |
| 3.3 | Propriétés | 99 |
| 3.4 | Coordonnées homogènes | 101 |
| 3.4.1 | Définitions | 101 |
| 3.4.2 | Equations cartésiennes de sous-espaces projectifs | 103 |
| 3.5 | Lien affine-projectif | 104 |
| 3.5.1 | Les complémentaires d'hyperplans projectifs | 104 |
| 3.5.2 | Visualisation du plan projectif | 108 |
| 3.5.3 | Visualisation dans le cas général | 112 |
| 3.6 | Topologie sur $\mathbb{P}(E)$ | 113 |
| 3.6.1 | Une distance sur $\mathbb{P}(E)$ | 113 |
| 3.6.2 | Points à l'infini | 115 |
| 3.6.3 | Lien avec la topologie-quotient | 117 |
| 3.7 | Le Théorème de Pappus | 119 |
| 3.8 | Le Théorème de Desargues | 122 |
| 3.8.1 | Le Théorème et sa preuve projective | 122 |
| 3.8.2 | Les différentes figures possibles | 125 |
| 3.9 | Dualité | 128 |
| 3.9.1 | Le principe | 128 |
| 3.9.2 | Le dual du Théorème de Pappus | 129 |
| 3.9.3 | Réciproque du Théorème de Desargues | 132 |
| 3.10 | Homographies | 134 |
| 3.10.1 | Définitions | 134 |
| 3.10.2 | Premières propriétés | 134 |
| 3.10.3 | Conservation des repères projectifs | 137 |
| 3.10.4 | Lien avec les fonctions homographiques | 138 |
| 3.10.5 | Conservation du birapport | 140 |
| 3.10.6 | Homographies laissant un hyperplan invariant | 145 |
| 4 | Sur les polyèdres eulériens | 151 |
| 4.1 | Polyèdres eulériens | 151 |
| 4.2 | Preuve de Cauchy (1811) | 152 |
| 4.3 | Les solides pathologiques de Lhuilier | 153 |
| 4.4 | Une caractérisation des polyèdres eulériens | 155 |
| 4.5 | Relation d'Euler pour des graphes connexes | 156 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Outils élémentaires de l'analyse | 163 |
| 5.1 | Introduction | 164 |
| 5.2 | Dichotomie | 164 |
| 5.3 | Inégalité des accroissements finis | 166 |
| 5.4 | Point fixe, méthode de Newton | 169 |
| 5.4.1 | Approximations successives, point fixe | 169 |
| 5.4.2 | Quelques exemples | 171 |
| 5.4.3 | La méthode de Newton | 176 |
| 5.5 | Intégration, outils de base | 179 |
| 5.5.1 | Un problème de raccord | 180 |
| 5.5.2 | Intégration des relations de comparaison | 180 |
| 5.5.3 | Calcul du sinus et du cosinus de 1° par une approxima- tion polynomiale | 182 |
| 5.6 | Quelques classes habituelles de fonctions | 183 |
| 5.7 | L'intégration par partie | 184 |
| 5.7.1 | Intégrons dans le bon sens | 185 |
| 5.7.2 | Conclusion et remarques | 189 |
| 5.8 | La formule de Taylor | 189 |
| 5.8.1 | Remarque préliminaire | 189 |
| 5.8.2 | Le théorème principal | 190 |
| 5.8.3 | Obtention d'autres écritures | 190 |
| 5.8.4 | Fonction développable en série entière | 192 |
| 5.8.5 | Cas des dérivées positives | 193 |
| 5.8.6 | Retour sur la méthode de Newton | 194 |
| 5.9 | La formule d'Euler-Maclaurin | 194 |
| 5.9.1 | Un exemple à la main | 194 |
| 5.9.2 | Un pas vers la formule d'Euler-Maclaurin | 199 |
| 5.9.3 | Polynômes de Bernoulli | 200 |
| 5.9.4 | Formule d'Euler-Maclaurin | 202 |
| 5.9.5 | Application à l'évaluation de restes de séries | 203 |
| 5.9.6 | Remarque | 204 |
| 5.10 | Le théorème de Weierstrass | 205 |
| 5.10.1 | Présentation du problème | 205 |
| 5.10.2 | La démonstration élémentaire d'Henri Lebesgue | 205 |
| 5.10.3 | Les noyaux positifs | 206 |
| 5.10.4 | Les opérateurs positifs | 209 |
| 5.11 | Interpolation de Lagrange | 212 |
| 5.11.1 | Introduction au problème | 212 |
| 5.11.2 | L'aspect algébrique | 212 |
| 5.11.3 | L'aspect algorithmique | 216 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.11.4 | Partie approximation | 219 |
| 6 | Accélération de convergence | 225 |
| 6.1 | Vitesse de convergence | 225 |
| 6.2 | Accélération de la convergence | 235 |
| 6.3 | Méthode d'accélération d'Aitken | 241 |
| 6.4 | Méthode d'accélération de Richardson | 249 |
| 7 | Matrices toutes puissantes | 259 |
| 7.1 | Le cas instructif de la taille 1 | 259 |
| 7.2 | Généralités | 261 |
| 7.2.1 | Dévisage du problème par théorème spectral caractéristique | 261 |
| 7.2.2 | L'exponentielle : une bijection entre nilpotents et unipotents | 264 |
| 7.2.3 | Le cas non inversible se ramène au cas inversible | 265 |
| 7.3 | Matrices toutes puissantes sur \mathbb{C} | 266 |
| 7.4 | Matrices toutes puissantes sur \mathbb{R} | 268 |
| 7.4.1 | Premières constatations | 268 |
| 7.4.2 | Image de l'exponentielle de matrices réelles | 269 |
| 7.4.3 | Caractérisation des matrices $\text{TP}\mathbb{R}$ | 271 |
| 7.4.4 | Caractérisation des carrés inversibles | 272 |
| 7.5 | Matrices toutes puissantes sur un corps fini | 273 |
| 7.6 | Matrices toutes puissantes sur \mathbb{Q} | 273 |
| 7.6.1 | Cas des matrices de la forme $rI_p + N$ | 273 |
| 7.6.2 | Une première étude du spectre d'une matrice $\text{TP}\mathbb{Q}$ | 275 |
| 7.6.3 | Etude finale du spectre et conclusion | 276 |
| 7.6.4 | Annexe : nombres tout puissants sur un corps de nombre | 279 |
| 7.7 | Exercices corrigés | 280 |
| 7.7.1 | Diagonalisation de l'exponentielle d'une matrice | 280 |
| 7.7.2 | Racines carrées de matrices | 282 |
| 7.7.3 | Raffinement de la surjectivité de l'exponentielle | 287 |
| 7.7.4 | Matrices toutes puissantes sur \mathbb{Z} | 291 |

Préface

C'est avec beaucoup d'intérêt que j'ai pris connaissance du projet de Dany-Jack Mercier d'éditer une revue originale destinée à publier des travaux, consacrés aux mathématiques et à leur enseignement d'un type dont on doit bien admettre qu'il a du mal à trouver sa place dans les revues existantes.

Fruits de l'expérience de leurs auteurs, comme enseignants dans le secondaire, dans le supérieur, et notamment en préparation aux concours de recrutement d'enseignants, également comme chercheurs, ces articles possèdent un caractère hybride, métissé, qui les fait échapper aux canons classiques de l'article de didactique, historique, épistémologique, mathématique ou du manuel de cours.

Et pourtant, c'est bien la lecture de ce type de contributions, érudit sans être académiques, rigoureuses sans être pesantes, pleines de remarques, de conseils ou de compléments en marge du propos principal, qui aide à fonder une culture mathématique riche et cohérente, à l'opposé de la succession d'éléments épars et sans lien qui marque trop souvent les cursus actuels.

Connaissant l'exigence de rigueur mathématique de Dany-Jack Mercier, rigueur qui traverse son oeuvre didactique, scientifique au travers de projets aussi divers que réussis - comme son site Mégamaths, ses ouvrages pédagogiques - je peux affirmer que le lecteur pourra parcourir les articles en toute confiance et qu'il y fera une multitude de découvertes enrichissantes.

Dans une période où l'immédiat, le clinquant, la superficialité semblent l'emporter, il est rassurant de voir quelqu'un se lancer seul, dans une entreprise aussi noble qu'utile à la collectivité. Longue vie aux "Lectures sur les Mathématiques, l'Enseignement & les Concours" !

Antoine Delcroix
Professeur à l'IUFM de Guadeloupe
Responsable du CRREF
Président du Conseil Scientifique et Pédagogique

Avant-propos

Voici le premier numéro d'une revue dédiée aux mathématiques, à l'enseignement et aux concours.

Vaste programme s'il en est, cet espace de liberté est ouvert à tous les collègues de la maternelle à l'université qui désirent partager leurs travaux pour donner à ceux-ci une visibilité supplémentaire et les proposer aux lecteurs avertis. Les thèmes abordés dans cette revue se veulent libres et variés.

En me lançant dans ce projet de publication, ma première idée était de donner la parole aux praticiens des mathématiques, à tous mes collègues qui vivent leur science au jour le jour devant des élèves, en leur proposant un espace où ils pourraient s'exprimer en direction de tous ceux qui désirent lire de beaux textes mathématiques, qui veulent réfléchir sur les divers aspects de notre métier d'enseignant, ou qui préparent des concours et cherchent aides et munitions sous la forme d'exposés ciblés et suffisamment détaillés sur des thèmes fondamentaux.

Mon expérience de webmestre de MégaMaths m'a montré qu'un bon nombre de "perles", de travaux intéressants faits par des collègues, ne sont pas diffusés largement ou, s'ils le sont sur internet, font rarement l'objet d'une publication officielle. C'est dommage, car même si la mise en ligne sur internet est un outil remarquable et simple de mise à disposition de l'information, la publication traditionnelle, avec ses besoins de présentation minutieuse et de relectures répétées, demeure le moment où la publication "prend date" et se trouve définitivement prise en compte par la communauté.

Aller jusqu'à la publication physique d'un livre, c'est aussi proposer aux lecteurs un outil de travail bien réel qu'il pourra avoir plus envie d'utiliser.

Cet espace est un espace de liberté où nous nous retrouvons entre "aficionados" : auteurs et lecteurs. Ici seul le contenu et les idées importent, sans qu'il soit nécessaire de suivre une ligne imposée ou de se plier à une quelconque mode forcément passagère.

Ce premier numéro propose 7 articles. Le premier est un article de didactique qui montre le travail d'un professeur dans sa classe de sixième, et les six

autres sont des articles de fond qui intéresseront en particulier les candidats aux concours qui désirent réviser un thème et s'entraîner sur des exercices corrigés.

Voyons cela plus en détail :

► Dans "*L'apprentissage de l'autonomie en sixième*", Laurence Chéla-mie nous montre, exemples à l'appui, comment un professeur de collège peut espérer rendre ses élèves plus autonomes et directifs devant un problème mathématique. L'objectif est bien de motiver un authentique "passage à l'acte" pour qu'un élève de sixième ne se sente plus démuné devant un texte mathématique qui lui est proposé.

Comment lui donner des schémas de réaction ? Quels objectifs doit-on choisir ? Quelles activités peut-on imaginer dans sa classe pour atteindre ces objectifs ? Autant de questions qui méritent d'être posées et qui le seront, de façon toujours très sensible, dans cet article.

► Ensuite nous laisserons notre collègue et pédagogue Dominique Hoareau nous raconter des "*Histoires de groupes*". Son article de synthèse permet de survoler en quelques pages une bonne partie de tout ce que l'on doit connaître sur les groupes quand on prépare un concours de recrutement.

Les structures algébriques ont été une des conquêtes du vingtième siècle, et les groupes tiennent une place de choix dans ces structures. L'exposé est bien mené et motivant !

► Je vous propose ensuite de plonger dans un espace projectif pour aller voir comment démontrer d'un seul coup deux jolis et très classiques théorèmes d'alignement, les théorèmes de Pappus et de Desargues, qui n'ont rien perdu de leur fraîcheur malgré les siècles !

Démontrer ces résultats sans devoir nous placer dans chacun des six cas de figures possibles est une bénédiction.

Mais pour ce faire, il est nécessaire de bien introduire les espaces projectifs et de montrer en quoi ils peuvent nous intéresser en géométrie classique. J'ai donc insisté sur la description du lien entre espaces projectifs et espaces affines, et sur toute la mécanique du travail "en coordonnées projectives" une fois que l'on a choisi un repère projectif.

Aucune connaissance préalable des espaces projectifs n'est demandée. Il suffit de connaître un peu d'algèbre linéaire pour pouvoir lire cet article. La fin de l'exposé profite de l'investissement que nous avons consenti pour parler :

- des théorèmes duaux (qui se déduisent mécaniquement d'autres théorèmes en échangeant les rôles des points et des droites),

- des homographies et du lien avec les fonctions homographiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

► Le quatrième voyage se passe au pays des solides pathologiques et donc de la célèbre formule d'Euler $S - A + F = 2$ conjecturée en 1750 et démontrée rigoureusement en 1794 par Legendre. La preuve de cette formule sera donnée en utilisant des graphes connexes.

► L'article de Robert Rolland est un article de fond sur l'analyse, ses outils de base et leurs utilisations dans le cadre du calcul infinitésimal. L'auteur sait magnifiquement nous intéresser tout au long de cette pérégrination : accroissements finis, points fixes, méthode de Newton, intégration, interpolation... Le panorama qui se dégage nous permet de mieux prendre conscience des enjeux et des objectifs de cette partie des mathématiques.

► Jean-Etienne Rombaldi nous propose ensuite une étude sur "*l'accélération de la convergence des suites réelles*".

Toutes les définitions sont clairement précisées (convergence lente, géométrique de rapport λ , rapide, super-linéaire) et commentées. Pas moins de 19 exercices sont livrés avec une correction complète et serviront d'entraînement pour les candidats aux concours.

L'article, qui s'achève sur la description des procédés d'accélération d'Aitken et de Richardson, a le mérite de proposer un exposé cohérent et précis sur un sujet qui n'est pas souvent traité dans la littérature bien que présent dans le programme de l'oral du CAPES (session de 2008) et donc aussi dans celui de l'agrégation.

► Et nous arrivons à la dernière étude proposée par Arnaud de Saint Julien. Notre collègue, enseignant en CPGE, se propose de déterminer toutes les matrices carrées "toutes puissantes" sur un corps \mathbb{K} lorsque \mathbb{K} est \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} ou un corps fini \mathbb{F}_q , c'est-à-dire toutes les matrices carrées A telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B vérifiant $A = B^n$.

Cette étude spécialement bien menée est l'occasion de reparler de la réduction des endomorphismes et d'utiliser la décomposition de Dunford.

Beaucoup de jolis résultats sont mis en valeur et utilisés, comme ce raffinement de la surjectivité de l'exponentielle complexe qui s'énonce :

"Pour toute matrice M de $GL_p(\mathbb{C})$, il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$ "

dont on propose deux preuves totalement différentes, l'une en utilisant la décomposition de Dunford et le Théorème de Cayley-Hamilton (Lemme 7.2) et l'autre, très élégante, qui utilise des arguments topologiques (exercice 7.3).

Cerise sur le gâteau, la dernière section propose quatre exercices originaux et bien jolis qui mettent en oeuvre des résultats importants.

Voilà qui clôt ce petit tour d'horizon du volume I.

Je voudrais terminer en remerciant chaleureusement tous les contributeurs de ce numéro, et je dois dire que, malgré le temps et la sueur que cela m'a coûté, j'ai pris suffisamment de plaisir à lire ces articles tout en les formatant pour qu'ils entrent dans ce recueil aux normes imposées... pour recommencer l'aventure prochainement pour un second volume.

Je voudrais aussi signaler que j'ai entrepris ce travail dans le cadre du CRREF (Centre de Recherche et Ressources en Education et Formation de l'IUFM de Guadeloupe) auquel je fais partie.

Je lance enfin un appel aux collègues qui voudraient me proposer un article en leur demandant de prendre simplement contact avec moi par mail¹. Bien entendu vous pouvez aussi me contacter pour me faire part de vos remarques au sujet du volume que vous avez entre les mains. Vous pouvez aussi aller sur le site Web MégaMaths² pour me retrouver, partager vos commentaires, télécharger des documents numériques ou découvrir l'espace qui sera dédié à cette revue.

Maintenant il est temps de nous plonger dans ces articles passionnants... et citer Charles Baudelaire :

Plonger au fond du gouffre,
Enfer ou ciel, qu'importe ?
Au fond de l'inconnu
Pour trouver du nouveau !

Bonne lecture !

Pointe-à-Pitre ce 26 janvier 2009
Dany-Jack Mercier

¹dany-jack.mercier@univ-ag.fr

²Les adresses de MégaMaths sont changeantes suivant le bonheur de mes hébergeurs. Actuellement le site se trouve en <http://megamaths.perso.neuf.fr/>. Si vous ne le trouvez pas à cette adresse, le plus simple est de lancer une recherche avec les termes "megamaths" et "capes" sur votre moteur de recherche favori, ou de me contacter par mail pour me demander la nouvelle URL.