Table des matières

Avant-propos

Ce livre rassemble 7 problèmes proposés au CAPES interne de mathématiques de l'année 2002 à l'année 2008, et deux épreuves de concours proches, présentés avec un corrigé que j'ai voulu détailler[1].

Utiliser des annales pour préparer un concours permet de s'entraîner en étant certain de rester dans le sujet, de réviser et/ou apprendre des notions utiles faisant partie du programme.

S'il est toujours conseillé d'entrer dans le problème avec coeur et entrain, et de répondre aux questions en utilisant un brouillon et en rédigeant sa solution, il est bon de ne pas perdre de vue que l'objectif principal est de "faire des progrès", d'apprendre, et de ne pas gaspiller une minute du temps dont on dispose, sauf si on le décide consciemment.
Aussi je conseillerai :

▶ D'utiliser le matériel (stylos, crayons, gommes, calculatrice...) dont on disposera le jour du concours.

▶ D'utiliser deux types de brouillon :

a) D'abord un *brouillon standard* sur lequel on se donne volontairement *le droit de tout écrire pour faciliter son travail de recherche*, sans se sentir obligé d'aller obligatoirement jusqu'à une rédaction précise de la réponse, donc en s'arrêtant dès qu'on a trouvé une issue et qu'on est capable de passer au propre pour rédiger à partir des seules traces écrites dont on dispose.
Il ne s'agit pas de rédiger complètement au brouillon pour ensuite perdre du temps à recopier la solution au propre. Il faut au contraire s'entraîner à rédiger *directement* au propre dès qu'on s'aperçoit qu'on est capable de le faire[2].

[0] cmonannalescapesinterne2002a08 v1.00

[1] Sur mon site MégaMaths, je propose des annales corrigées plus anciennes du CAPES interne sur lesquelles on peut s'entraîner. Pour y aller, c'est simple : il suffit de taper "megamaths" dans tout bon moteur de recherche...

[2] Avec un taux de réussite suffisant ! Celui-ci me semble convenable s'il permet d'obtenir plus de 80% des points réservés à la question traitée. On fait évidemment son possible pour

b) Ensuite un *brouillon voltigeur* permettant de faire des tests d'écriture quand on rédige directement au propre.
Au propre, on écrit le numéro complet de la question puis on commence à rédiger. Si on hésite ou si on peut seulement imaginer le début d'une phrase sans savoir si on pourra la terminer convenablement en expliquant ce qu'on a envie d'expliquer, on place son brouillon voltigeur sur la copie en cours de rédaction et on y écrit le début de la phrase.
On effectue ainsi un *test d'écriture au brouillon*. On recopie ensuite directement la phrase au propre dès qu'on est certain qu'elle peut convenir.

▶ De lire la solution proposée dès qu'on en a assez, ou qu'on s'aperçoit qu'on perd trop de temps. Le but est alors de comprendre la solution, ce qui n'est pas rien.

▶ De s'autoriser, à certains moments, à rechercher les questions uniquement au brouillon, sans faire cas de la rédaction, et en lisant la solution proposée pour avancer, vérifier ou comparer des méthodes.

▶ De s'astreindre à rédiger complètement les solutions de quelques questions, de temps en temps, pour être sûr de savoir comment passer facilement du brouillon à une solution rédigée, présentée et structurée. En tout état de cause, c'est ce produit fini qui sera le seul témoin de son travail après la fin de l'épreuve, qui sera corrigé et qui donnera des points, pas le brouillon !

Amusons-nous autant que nous pouvons avec ces problèmes et conservons un moral d'enfer pour aller plus loin...

Bon courage à toutes et à tous !

Pointe-à-Pitre, le 3 mars 2008
Dany-Jack Mercier

gagner tous les points donnés à la question, mais ce ne sera jamais au détriment des autres questions et sans ce poser la question fatidique : n'ai-je pas intérêt à gagner seulement une partie des points réservés à cette question pour dégager plus de temps et me permettre d'aborder, et de résoudre, beaucoup d'autres questions ?

Chapitre 1

Année 2002

1.1 Énoncé

PREMIER PROBLÈME : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DUNE SUITE EN FONCTION DE SA VALEUR INITIALE

On considère un nombre réel a et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+2} \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier, pour différentes valeurs de a, le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

1. Etude d'un premier cas particulier.

Dans cette question, on suppose que $a = 1/2$.

1.1. Calculer la valeur exacte de u_1 et u_2.

1.2. Donner, pour chacun des nombres u_1 et u_2 un encadrement d'amplitude 10^{-2} à bornes décimales.

1.3. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $0 < u_n \leq 1$.

1.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

2. Etude d'un second cas particulier.

Dans cette question, on suppose que $a = 2$.

2.1. Calculer la valeur réelle exacte, puis donner une valeur approchée décimale à 10^{-2} près de u_1, u_2 et u_3.

2.2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = e^x - (x+1)(x+2).$$

2.2.1. Étudier le signe de f''.

2.2.2. Montrer que f' est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

2.2.3. Déduire de ce qui précède que f est strictement positive sur l'intervalle $[3, +\infty[$.

2.3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq n$.

2.4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

3. Etude du cas général.

On revient au cas général où a est un nombre réel quelconque. On désigne par E_a l'ensemble des indices $n > 0$ tels que u_n est strictement inférieur à 1 :

$$E_a = \{n \in \mathbb{N}^* \,/\, u_n < 1\}\,.$$

3.1. Déterminer $E_{1/2}$ et E_2.

3.2. Démontrer que, si E_a n'est pas vide, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3.3. Démontrer que, si E_a est vide, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \ln(n+2)$$

et en déduire, dans ce cas, que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

4. Détermination d'une partition de $\mathbb{R}$ en fonction du comportement de la suite.

On désigne par A_0 l'ensemble des réels a tels que E_a n'est pas vide et par A_∞ celui des réels a tels que E_a est vide.

4.1. Montrer que A_0 et A_∞ sont deux intervalles complémentaires de $\mathbb{R}$.

4.2. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que :

$$]-\infty, m[\subset A_0 \subset]-\infty, m] \text{ et }]m, +\infty[\subset A_\infty \subset [m, +\infty[.$$

4.3. En déduire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4.4. A l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée de m à 10^{-2} près.

4.5. Déterminer auquel des deux intervalles A_0 ou A_∞ appartient le nombre réel m.

SECOND PROBLEME : GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN COMPLEXE

Ce problème comporte deux parties. la partie I permet de retrouver des résultats classiques de géométrie du triangle ; la partie II aborde des questions relatives à la droite. Ces deux parties sont indépendantes l'une de l'autre, à l'exception de la question II.5. qui utilise des résultats de la partie I.

Dans tout le problème, on se place dans le plan affine euclidien. On rappelle que, dans un triangle, le pied de la hauteur passant par un sommet est l'intersection de cette hauteur avec le côté opposé à ce sommet. D'autre part, z étant un nombre complexe, on désigne par $\overline{z}$ son conjugué et par $|z|$ son module.

Partie I

I.0. Question préliminaire.

Définition 1. On appelle quadrangle toute figure du plan formée par six droites joignant deux à deux quatre points du plan non alignés trois à trois.

La figure 1.1 représente le quadrangle $(MNPQ)$. Les points M, N, P, Q sont les sommets de ce quadrangle et les segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$, $[QM]$, $[PM]$, $[QN]$ en sont les côtés.

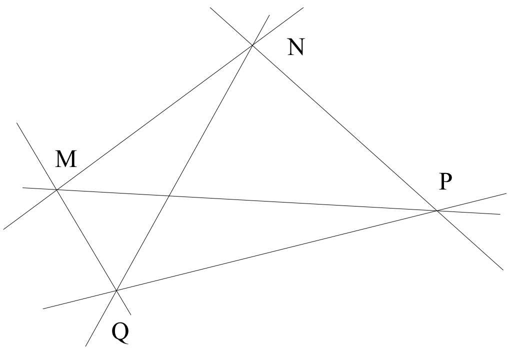

FIG. 1.1 – Quadrangle $(MNPQ)$

Définition 2. On dit qu'un quadrangle est orthocentrique si, et seulement si, chacun de ses sommets est 1'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets.

I.0.1. Démontrer qu'un quadrangle $(MNPQ)$ est orthocentrique si, et seulement si, le point M est l'orthocentre du triangle NPQ.

On se place désormais dans le plan complexe rapporté au repère cartésien orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et on appelle Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Soient A, B, C trois points distincts de Γ tels que le triangle ABC ne soit pas rectangle. On note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C. Le point M d'affixe m sera parfois noté $M(m)$.

I.0.2. Tracer une figure soignée représentant l'ensemble des situations étudiées dans la partie I. On complétera cette figure au fur et à mesure des questions qui seront traitées.

I.1. Construction d'un quadrangle orthocentrique.

I.1.1. Soit C' l'image du point O dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AB). Démontrer que C' est distinct de O, puis déterminer la nature du quadrilatère $AOBC'$. Démontrer que l'affixe de C' est $a+b$.

I.1.2. On considère le point D tel que $OC'DC$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati).

a. A quelle condition portant sur le triangle ABC les points O, C', D, C sont-ils alignés ?

b. Démontrer que (CD) est une hauteur du triangle ABC.

I.1.3. Démontrer que l'affixe d du point D est $d = a+b+c$. En déduire que (AD) et (BD) sont des hauteurs du triangle ABC.

I.1.4. Démontrer que le quadrangle $(ABCD)$ est orthocentrique.

I.2 Le cercle et la droite d'Euler d'un triangle.

I.2.1. On considère le milieu commun C_1 des segments $[AB]$ et $[OC']$, le milieu commun Ω des segments $[OD]$ et $[CC']$ et, enfin, le milieu C_2 du segment $[CD]$. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{C_1\Omega}$ et $\overrightarrow{\Omega C_2}$.

I.2.2. En déduire que le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en Ω passe par les milieux respectifs A_1, B_1, C_1 des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ du triangle ABC, par les milieux respectifs A_2, B_2, C_2 des segments $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ et par les points A_3, B_3, C_3, pieds des hauteurs du triangle ABC passant respectivement par A, B, C.

Le cercle précédent est appelé cercle d'Euler du triangle ABC.

I.2.3. Montrer que l'homothétie h de centre D et de rapport 2 transforme le cercle d'Euler du triangle ABC en le cercle circonscrit au triangle ABC.

I.2.4. A l'aide de ce qui précède, donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. Étant donné un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$, les quatre triangles déterminés par ses sommets pris trois à trois ont le même cercle d'Euler. Celui-ci passe par neuf points : les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs des triangles.

I.2.5. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Calculer l'affixe de G ; en déduire que les points O, Ω, D et G sont alignés. Lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral, la droite passant par les quatre points précédents est appelée droite d'Euler du triangle ABC. Préciser la position des points Ω et G sur le segment $[OD]$. Que se passe-t-il si le triangle ABC est équilatéral ?

I.3. Cercle d'Euler associé à un quadrangle orthocentrique.

On ajoute aux points A, B, C, D, C' introduits précédemment le point $A'(b+c)$ et le point $B'(c+a)$.

I.3.1. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ est centré en D et de rayon 1 et que le quadrangle $(A'B'C'O)$ est orthocentrique (on pourra, en le justifiant, utiliser le fait que le triangle $A'B'C'$ est l'image de ABC par une isométrie que l'on précisera).

I.3.2. Compléter l'énoncé suivant :

Théorème 2. Soit un quadrangle orthocentrique $(ABCD)$. [...]. Les huit triangles [...] ont le même cercle d'Euler ; ce cercle passe par les douze points [...] rattachés au quadrangle.

I.3.3. On s'intéresse maintenant aux droites d'Euler.

a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral si, et seulement si, on a $a + b + c = 0$.

b. Dans le cas où le triangle ABC n'est pas équilatéral, que peut-on dire des droites d'Euler des triangles ABC et $A'B'C'$?

I.4. Un peu d'histoire des mathématiques.

Comme on le sait, l'oeuvre de Leonhard Euler (1707-1783) est colossale et touche à tous les champs des mathématiques ; mais Euler est plus connu pour ses travaux en analyse qu'en géométrie ; ses études dans cette branche étaient souvent prétexte à revenir à l'analyse qu'il affectionnait. Toujours épris d'un profond désir de clarté, il fut amené à préciser nombre de notations encore en vigueur à l'heure actuelle.
Pouvez-vous, parmi vos connaissances personnelles des programmes du secondaire, choisir un point précis (notion mathématique ou notation) qui soit un apport de ce mathématicien et le situer comme tel dans une courte présentation d'une dizaine de lignes accessible à des élèves de lycée ? Le cercle d'Euler et la droite d'Euler ne peuvent être retenus ici.

Partie II

Dans cette partie, le plan complexe est toujours rapporté à un repère cartésien orthonormal direct d'origine O. On désigne toujours par Γ le cercle de centre O et de rayon 1 et on note, comme précédemment a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D. On conseille vivement de réaliser plusieurs figures séparées.

II.1. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. Démontrer que les angles orientés de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ sont égaux. En déduire $ab = cd$.

II.2. Equation complexe d'une droite du plan complexe.

II.2.1. Soit I le milieu d'une corde $[AB]$ du cercle Γ. Soient $Z(z)$ un point, $S(s)$ l'image de Z dans la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$ et $T(t)$ le symétrique du point S par rapport au point I.

a. Lorsque le point Z est différent du point O, montrer que $\frac{s}{|s|}\frac{z}{|z|} = ab$, puis exprimer t en fonction de a, b, z. Le résultat obtenu est-il toujours valable quand Z coïncide avec O ?

b. Démontrer que le point Z appartient à la droite (AB) si et seulement si $Z = T$.

c. En déduire que la relation :

$$(1) \qquad z + ab\overline{z} = a + b$$

caractérise les points de la droite (AB).

d. Soit $[PQ]$ un diamètre de Γ. On note p l'affixe du point P ; démontrer que les points de la droite (PQ) sont caractérisés par $z - p^2\overline{z} = 0$.

II.2.2. Soit Δ une droite quelconque du plan passant par le point $Z_0(z_0)$ et parallèle à (PQ). Montrer que la relation :

$$(2) \qquad z - p^2\overline{z} = z_0 - p^2\overline{z}_0$$

caractérise les points de la droite Δ (on pourra noter que le point $Z(z)$ appartient à la droite Δ si et seulement si son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{Z_0O}$ appartient à la droite (PQ)).

On appelle la relation (2) une équation dans le plan complexe de la droite Δ. Le nombre $-p^2$ s'appelle le coefficient directeur complexe de toute droite parallèle à la droite (PQ).

II.2.3. Quel est le coefficient directeur complexe de la droite (AB) définie au **II.2.1.** ?

II.3. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes parallèles du cercle Γ. La droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par D recoupe le cercle Γ en $D'(d')$ (les points D et D' peuvent éventuellement être confondus). Démontrer que $d' = -c$, puis que $d' = -ab/d$.