

Table des matières

0.1	Avant-propos	11
0.2	Remerciements	12
1	Expérience aléatoire	15
1.1	Exposé-type	15
1.1.1	Définitions	15
1.1.2	Propriétés	17
1.1.3	Modéliser une expérience aléatoire	19
1.1.4	Conclusion	21
1.2	Compléments	21
1.2.1	Questions du jury	21
1.2.2	Que dit le programme?	29
1.2.3	Formule de Poincaré	34
1.2.4	Utilisation d'un tableur	35
1.3	Approfondissements	43
1.3.1	Une question du Chevalier de Méré	43
1.3.2	Les aiguilles de Buffon	44
1.3.3	Clans, tribus, boréliens et intégrale de Lebesgue	48
2	Module et argument d'un complexe	55
2.1	Exposé-type	55
2.1.1	Module	56
2.1.2	Argument	59
2.1.3	Applications	61
2.2	Compléments	63
2.2.1	Preuves des résultats de la Section 2.1.3	63
2.2.2	Questions du jury	65
2.2.3	Affixe d'un point, d'un vecteur	80
2.2.4	Exercices et autres applications	81
2.3	Approfondissements	86
2.3.1	Exponentielle complexe	86

2.3.2	Image d'une droite ou d'un cercle par $z \mapsto 1/z$	92
2.3.3	Note historique : le plan d'Argand-Cauchy	96
3	Fonctions $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto \bar{z}$	99
3.1	Exposé-type	99
3.1.1	Interprétations géométriques	99
3.1.2	Conséquences	101
3.1.3	Applications	103
3.2	Compléments	105
3.2.1	Questions du jury	105
3.2.2	D'autres applications	108
3.2.3	Une autre plan possible	113
3.3	Approfondissements	115
3.3.1	Une façon d'étudier les transformations $z \mapsto az + b$	115
3.3.2	La divine proportion	118
4	Droites et plans, parallélisme	123
4.1	Exposé-type	123
4.1.1	Droites	124
4.1.2	Plans	127
4.1.3	Demi-droites et segments	129
4.1.4	Conclusion et prolongements	130
4.2	Compléments	131
4.2.1	Prolongement : autre définition du parallélisme	131
4.2.2	Questions du jury	134
4.2.3	Caractérisations métriques d'un segment ou d'une demi-droite	153
4.2.4	Rappels sur la colinéarité de deux vecteurs	154
4.3	Approfondissements	155
4.3.1	Equation polaire d'une droite	155
4.3.2	Caractérisation barycentrique d'un segment ou d'une demi-droite	156
5	Théorème de Thalès	159
5.1	Exposé-type	159
5.1.1	Introduction	159
5.1.2	Théorème de Thalès	160
5.1.3	Réciproque	162
5.1.4	Applications	162
5.2	Compléments	168
5.2.1	Questions du jury	168

5.2.2	Que dit le programme?	175
5.2.3	Un compte rendu d'oral (Thalès par les aires)	178
5.2.4	Pour quelques distances de plus...	181
5.2.5	Trajets de lumière	184
5.2.6	La cuve percée	188
5.2.7	Le carré de Rupert	189
5.2.8	Image d'un point par une application affine	190
5.2.9	Construction du centre d'une similitude indirecte	192
5.2.10	Eléments caractéristiques d'une conique bifocale	193
5.2.11	Le théorème de Ménélaüs par les projections	194
5.3	Approfondissements	196
5.3.1	La distance Terre-Lune selon Aristarque	196
5.3.2	Conservation du birapport par projection centrale	198
5.3.3	Projections dans le plan	200
5.3.4	Théorème de Thalès en dimension 3	204
5.3.5	Projections en dimension 3	206
5.3.6	Généralisation aux espaces affines de dimension n	208
5.3.7	Thalès via la droite des milieux	212
5.3.8	Une caractérisation imparfaite du parallélogramme	217
5.3.9	La création du Monde	220
6	Projection orthogonale sur une droite	225
6.1	Exposé-type	225
6.1.1	Définitions et premières propriétés	225
6.1.2	Projection vectorielle associée	227
6.1.3	Rapports de projection	229
6.1.4	Applications	231
6.2	Compléments	234
6.2.1	Justification du cadre choisi pour l'exposé-type	234
6.2.2	Questions du jury	235
6.2.3	Au sujet des rapports de projection	238
6.2.4	Preuve du Théorème 82	243
6.2.5	D'autres applications	245
6.2.6	Une autre façon d'exposer : du vectoriel à l'anne	246
6.3	Approfondissements	247
6.3.1	Extrait du guide de survie	247
6.3.2	Problème de Fagnano	249

7	Le cercle	253
7.1	Exposé-type	253
7.1.1	Le cercle	253
7.1.2	Positions relatives d'une droite et d'un cercle	255
7.1.3	Positions relatives de 2 cercles	256
7.1.4	Point de vue analytique	257
7.2	Compléments	258
7.2.1	Questions du jury	258
7.2.2	Tangentes au cercle	268
7.2.3	Preuve des deux lemmes admis	269
7.2.4	Compléments sur la position de 2 cercles	270
7.3	Approfondissements	271
7.3.1	Une expérience vécue à l'oral du CAPES interne	271
7.3.2	Inéquations $a \cos t + b \sin t \geq c$	274
8	Produit vectoriel	277
8.1	Exposé-type	277
8.1.1	Définition et premières propriétés	278
8.1.2	Interprétation géométrique et bilinéarité	280
8.1.3	Définition analytique	282
8.1.4	Applications	282
8.2	Compléments	286
8.2.1	Questions du jury	286
8.2.2	Rappels sur l'orientation d'un espace vectoriel	293
8.2.3	Preuve du Théorème 97	296
8.2.4	Au sujet des polygones simples	297
8.2.5	Théorème de la perpendiculaire commune	299
8.2.6	D'autres applications du produit vectoriel	299
8.3	Approfondissements	301
8.3.1	Double produit vectoriel et division vectorielle	301
8.3.2	Une alternative pour cette leçon : le produit mixte	305
8.3.3	Théorème de Newton	311
8.3.4	Champs magnétiques	312
9	Applications du p.s. et du p.v.	317
9.1	Exposé-type	317
9.1.1	Distances	317
9.1.2	Aires	321
9.1.3	Volumes	322
9.1.4	Angles	323
9.2	Compléments	325

9.2.1	Questions du jury	325
9.2.2	Autres applications	328
9.3	Approfondissements	330
9.3.1	Méthode de Householder	330
9.3.2	Section d'aire maximale d'un tétraèdre	332
10	Comparaison des fonctions	337
10.1	Exposé-type	337
10.1.1	Domination	338
10.1.2	Prépondérance	340
10.1.3	Equivalence	341
10.1.4	Applications	345
10.2	Compléments	350
10.2.1	Questions du jury	350
10.2.2	Non compatibilité de la somme	356
10.2.3	Exponentielles et logarithmes	358
10.2.4	Séries de Riemann	359
10.3	Approfondissements	361
10.3.1	Intégration et sommation de relations de comparaison	361
10.3.2	Recherche d'équivalents	367
10.3.3	Intégrales et séries de Bertrand	371
11	Formules de Taylor	375
11.1	Exposé-type	375
11.1.1	Théorème de Rolle	375
11.1.2	Formule de Taylor-Lagrange	378
11.1.3	Formule de Taylor-Young	379
11.1.4	Formule de Taylor avec reste intégral	379
11.1.5	Applications	381
11.2	Compléments	385
11.2.1	Questions du jury	385
11.2.2	Rappel de la première formule de la moyenne	389
11.2.3	Autre présentation possible	390
11.2.4	Allure d'un arc paramétré au voisinage d'un point	391
11.3	Approfondissements	402
11.3.1	Quatre exercices pour s'entraîner	402
11.3.2	Développement en série entière	404
11.3.3	Cas d'une fonction de \mathbb{R} dans un e. v. n.	416
11.3.4	Cas d'une fonction d'un e.v.n. dans un e.v.n.	418

12 Développements limités	425
12.1 Exposé-type	425
12.1.1 Introduction	426
12.1.2 Définitions	426
12.1.3 Continuité et dérivabilité	428
12.1.4 Obtention de développements limités	429
12.1.5 Opérations	430
12.2 Compléments	435
12.2.1 Questions du jury	435
12.2.2 Intégration de développements limités	440
12.2.3 Utilisation d'une équation différentielle	441
12.3 Approfondissements	443
12.3.1 Développements limités usuels	443
13 Fonctions convexes	447
13.1 Exposé-type	447
13.1.1 Définitions et premières propriétés	448
13.1.2 Inégalités des trois pentes	450
13.1.3 Cas des fonctions dérivables	456
13.1.4 Applications	458
13.2 Compléments	460
13.2.1 Que doit-on traiter dans cette leçon?	460
13.2.2 Questions du jury	461
13.2.3 Preuve de l'inégalité de Jensen	467
13.2.4 Preuves alternatives pour l'exposé-type	467
13.2.5 D'autres applications	468
13.3 Approfondissements	473
13.3.1 Autres résultats concernant la dérivabilité	473
13.3.2 Sur un intervalle ouvert	478
13.3.3 Droites affines d'appui	480
13.3.4 Extremums d'une fonction convexe	484
13.3.5 Mid-convexité	485
13.3.6 Inégalités de Hölder et de Minkowski	488
14 Recherche d'extremums	493
14.1 Exposé-type	493
14.1.1 Définitions	494
14.1.2 Résultats fondamentaux	494
14.1.3 Exemples	498
14.1.4 Utilisation de la formule de Taylor-Young	502
14.2 Compléments	502

14.2.1	Questions du jury	502
14.2.2	Lois de Snell-Descartes	504
14.2.3	D'autres exemples	506
14.2.4	Une condition suffisante globale	510
15	Annexes	511
15.1	Liste des leçons 2007	511
15.2	Extraits d'un rapport du jury 2007	516
15.2.1	Les attentes du jury d'un concours de recrutement	517
15.2.2	Au sujet de l'épreuve orale d'exposé	518
15.2.3	Sur l'entretien qui suit l'exposé	520
15.2.4	Quelques réflexions des commissions d'oral	521
15.3	Boîtes à moustaches	522
15.4	Surfaces dans \mathbb{R}^3	525
15.4.1	Rappels sur le Théorème des fonctions implicites	526
15.4.2	Surface définie paramétriquement	529
15.4.3	Surface définie implicitement	532
15.4.4	Position relative d'une surface de \mathbb{R}^3 et du plan tangent	535
15.4.5	Sous-variétés différentielles	535

0.1 Avant-propos

Ce quatrième volume de la collection propose l'étude de 14 nouvelles leçons d'oral 1 du CAPES externe de la session 2007. Les thèmes abordés sont variés, et toujours présentés en distinguant trois parties.

- La première partie consiste en un exposé-type sur lequel il s'agit de travailler en priorité pour acquérir les connaissances à utiliser le jour de l'oral.

- La seconde partie propose des compléments parmi lesquels tout un panel de questions que le jury pourrait poser (ou a déjà posé dans le passé), sur lesquelles il est bon d'avoir réfléchi. Elle permet de prendre un recul indispensable pour maîtriser le sujet. Cette seconde partie sera donc travaillée, ou du moins survolée si le temps restant pour sa préparation est trop court.

- La troisième partie contient des approfondissements bien utiles pour qui veut prendre encore plus de recul, ou préparer les écrits des concours, ou désire approfondir les notions qu'il vient de visiter dans le but de passer l'agrégation. On choisira de travailler ou non ces approfondissements suivant le temps dont on dispose et les objectifs qu'on a retenu.

Une stratégie intéressante consiste à se lancer dans les compléments et les approfondissements pour utiliser l'étude des leçons d'Oral 1 comme *tremplin pour des révisions générales de l'écrit des concours proches* (CAPES externe ou interne, et agrégation). L'idée est alors d'étudier un thème précis, de l'approfondir, par exemple en répondant aux "questions du jury" et en lisant les commentaires de la partie "Compléments", pour enfin résoudre des exercices, lire des mises au point, faire des rappels figurant et profiter des ouvertures placés dans les rubriques "Compléments" et "Approfondissements".

Un tel livre ne peut être que volumineux pour répondre à des besoins variés suivant le moment dans la préparation du concours et les objectifs que l'on s'est donnés.

Mais je trouve que je parle ici beaucoup de concours, donc d'épreuves à subir. Cela fait peur, et il serait dommage de ne ressentir que le couperet d'une évaluation finale, et de transformer ce travail mathématique en un ennui incontournable... Ce serait faire fausse route.

Je reste persuadé que l'on fait aussi des mathématiques *pour le plaisir*, et j'espère que ce quatrième volume participera à cette joie que l'on peut ressentir à bien comprendre certaines choses.

Se lancer dans ce travail de fond, c'est aussi éprouver une joie artistique, participer à un jeu de l'esprit, jouir d'une preuve que l'on comprend de bout

en bout, prendre plaisir à dessiner pour représenter des situations et les ressentir profondément. Si les années de préparation à un concours sont l'occasion unique de "profiter" de ces joies, je serai comblé de savoir que certains amateurs utilisent ce volume pour faire des mathématiques agréables et de façon gratuite.

Que ce volume facilite le travail quotidien du candidat dans sa préparation des épreuves du concours, et permette à ceux qui le désirent de jouer sur une belle partition !

Pointe-à-Pitre, le 2 février 2008
Dany-Jack Mercier¹

0.2 Remerciements

Je remercie chaleureusement Céline, pour sa description précise des épreuves orales qu'elle a vécues, Alexandre Bomor pour ses suggestions concernant les forces magnétiques de Lorentz faisant intervenir le produit vectoriel, Sébastien Virduci pour son compte rendu d'oral qu'il a bien voulu partager, Jean-Eric Richard pour sa remarque pertinente concernant l'astroïde, ainsi que tous mes interlocuteurs sur le site MégaMaths pour les nombreux échanges que j'ai eu avec eux.

Un grand merci à Fabien Herbaut, formateur à l'IUFM de Nice (centre de La Seyne sur Mer), qui m'a autorisé à exploiter certains passages de son fascicule intitulé "Souvenirs d'oraux du CAPES externe de Mathématiques"[20]. Certaines questions des rubriques "Questions du jury" de ce livre sont directement inspirées de ce fascicule².

Pour terminer, je voudrais rappeler le travail de nos administratifs qui, jour après jour et inlassablement, permettent à nos établissements de fonctionner dans les meilleures conditions possibles.

Ceci mérite d'être souligné, et je désire ici avoir une pensée particulière pour notre Directeur de l'IUFM de Guadeloupe, Max Dorville, toujours passionné, et notre Directrice adjointe, Marie-Denise Marie-Alie, toujours radieuse, qui, depuis des années, se dépensent sans compter pour que nos enseignements puissent se dérouler dans de bonnes conditions, pour le plus grand bénéfice de nos étudiants.

¹Pour contacter l'auteur : dany-jack.mercier@univ-ag.fr

²Il s'agit des questions n°6, 7, 10, 12, 27, 65, 67, 122, 144 et 145.