

Table des matières

0.1	Avant-propos	5
0.2	Pour bien utiliser ce recueil	7
0.3	Commencer par les bons exercices!	11
0.4	Commentaires sur les exercices	14
1	Ensembles	37
1.1	Exercices	37
1.2	Problème	54
2	Arithmétique	59
2.1	Exercices	59
2.2	Problèmes	77
3	Groupes, anneaux & corps	83
3.1	Exercices	83
3.2	Problèmes	98
4	Algèbre linéaire	115
4.1	Exercices	115
4.2	Problème	129
5	Réduction d'endomorphismes	139
5.1	Exercices	139
5.2	Problèmes	148
6	Formes bilinéaires symétriques & f. h.	169
6.1	Exercices	169
6.2	Problème	183
7	Espaces vectoriels euclidiens	191
7.1	Exercices	191
7.2	Problème	196

8	Espaces affines	207
8.1	Exercices	207
8.2	Problème	218
9	Espaces affines euclidiens	225
9.1	Exercices	225
9.2	Problèmes	254
10	Rudiments de topologie	271
10.1	Exercices	271
10.2	Problème	286
11	Isométries	291
11.1	Exercices	291
11.2	Problèmes	300
12	Similitudes	311
13	Coniques & quadriques	333
13.1	Exercices	333
13.2	Problèmes	360
14	Probabilités & statistiques	395
14.1	Exercices	395
14.2	Problèmes	399
15	Divers	421

0.1 Avant-propos

Avec ce second volume d'exercices, nous continuons à nous entraîner sur des thèmes récurrents des concours en algèbre, arithmétique, géométrie et probabilités. Les exercices et problèmes proposés ont été généralement utilisés en TD dans mon groupe de préparation, et l'on y trouve des extraits de concours.

Ce livre permet de progresser dans sa préparation en choisissant "l'incidence exercices". Les exercices et problèmes sont courts et centrés sur l'essentiel, l'idée étant qu'il n'est pas nécessaire de travailler seulement sur des annales pour réviser ou acquérir les fondamentaux.

Les avantages de "l'incidence exercices" résident sans doute :

- dans l'économie de temps que l'on réalise à s'entraîner sur des thèmes essentiels et récurrents paraissant à l'écrit, les exercices et problèmes étant choisis dans le programme du concours, en fonction de leur intérêt propre ;

- dans les progrès que l'on peut accomplir en avançant résolument sur des exercices faisables, sans perdre un temps précieux à traiter les parties impraticables des épreuves (celles que personne ne traite en temps limité, de toute façon) : du point de vue stratégique, les points obtenus aux épreuves écrites le sont grâce aux questions qui étaient à portée du candidat ;

- dans la souplesse d'utilisation : 10 minutes de tranquillité suffisent pour commencer à rechercher une solution et faire des progrès ;

- dans la variété des thèmes proposés, ce qui assure une capacité de réponse minimale sur n'importe quelle partie du programme, et tend à nous rendre "insubmersibles".

Ce n'est pas tout : de nombreux énoncés proposés sont assez simples pour être utilisés dans une épreuve orale. Ils sont signalés par le symbole \supset et permettent d'agrémenter une leçon ou de proposer un exercice le moment venu.

Le symbole \mathcal{R} , quant à lui, signifie que l'exercice est important et doit être bien connu pour pouvoir éventuellement répondre à des questions du jury lors des épreuves orales : ne pas savoir y répondre ou ne pas avoir d'idées précises sur le sujet inciterait le jury à attribuer une note éliminatoire, ce qu'on tente évidemment d'éviter à tout prix.

"L'incidence exercices" est une forme de préparation. Ce n'est pas la seule. Pour arriver à s'entraîner au concours et aligner un volume important d'heures dans sa préparation, il me semble opportun de choisir une méthode qui nous

convienne et de tenir compte de l'humeur du moment : il faut écouter ses envies pour cultiver son moral et déborder d'énergie !

D'autres incidences de préparation existent et ne demandent qu'à être adoptées suivant son caractère :

- "L'incidence cours" s'appuie sur la lecture, la compréhension et l'entraînement à la résolution de problèmes... à partir de cours structurés sur des sujets donnés.

- "L'incidence leçons d'oral" permet de préparer l'écrit en lisant, en travaillant et en approfondissant des leçons d'oral.

- "L'incidence annales" consiste à utiliser des annales complètes et corrigées de façon détaillée.

- "L'incidence papillon" consiste à changer régulièrement d'incidence !

L'incidence retenue et la méthode employée sont bonnes si l'on constate qu'une heure de travail permet d'apprendre quelque chose de précis. A chacun de choisir son incidence de préparation, et de profiter de cette (ou ces) année(s) de préparation pour revenir sur les fondamentaux, éclairer et approfondir ses connaissances, et acquérir des automatismes salvateurs.

On trouvera plus bas d'autres conseils généraux pour bien utiliser ce livre, une classification des exercices et problèmes de ce recueil, et des commentaires plus détaillés.

Le but de ces commentaires est de permettre à chacun de mieux distinguer l'essentiel du superflu pour mieux "rester maître" de sa préparation.

Vous pouvez m'envoyer un message en utilisant mon adresse¹ ou en écrivant au webmestre de MégaMaths :))) Je vous répondrai s'il arrive bien dans ma boîte et s'il n'y a pas de souci informatique majeur.

Avant de terminer cette introduction, je voudrais remercier *Angela Davis* qui nous offre une très agréable première de couverture.

Dans notre contexte, cette peinture sur toile, nommée "Jeux de Dames", pourrait symboliser notre travail décidé et courageux sur l'échiquier des problèmes mathématiques, dans une atmosphère parfois inquiétante propre aux souterrains voûtés d'une demeure ancestrale. Les personnages dialoguent inlassablement entre eux : cela ne rappelle-t-il pas l'indispensable conversation que l'on doit mener avec soi-même lorsqu'on s'échine sur un problème pour toucher une solution ? Le bleu profond de la mer enveloppant l'échiquier représente un

¹dany-jack.mercier@wanadoo.fr

idéal de beauté et de perfection, tandis que l'horizon symbolise l'achèvement de notre labeur, le bercement tranquille du travail bien fait.

Bon courage et bonne chance à tous !

Pointe-à-Pitre, le 25 mars 2007,
Dany-Jack Alain Mercier.

0.2 Pour bien utiliser ce recueil

Pour bien utiliser les exercices de ce recueil, je conseille :

♣ \Rightarrow De chercher la solution d'une question au brouillon dès que vous le pouvez et même si vous ne disposez que de très peu de temps (10 minutes suffisent).

N'attendez pas de disposer de trois heures d'affilée pour commencer à travailler. Se libérer des heures durant pour s'entraîner pour le concours est un bon choix, bien entendu, mais difficile à réaliser dans la pratique, surtout si vous ne préparez pas le concours "à temps plein" dans un IUFM : je pense ici aux nombreux candidats libres qui font déjà "bouillir la marmite" et à tous les collègues inscrits à un concours interne.

Les obligations de la vie courante sont bien réelles, et il faut "faire face". Si vous travaillez et si vous avez des enfants en bas âge, il est encore possible de bien vous préparer au concours en choisissant une technique du type "guérilla mathématiques", en rentabilisant les quelques séquences de 10 minutes où vous pourrez vous mettre dans un coin pour vous poser des questions, griffonner au brouillon, ou simplement lire la solution proposée (une activité que je conseille vivement !).

Attention à l'utilisation du brouillon : il ne s'agit pas de confectionner un brouillon détaillé ou d'y recopier l'énoncé, mais d'utiliser des feuilles comme support pour de rapides investigations. On écrit sur un brouillon pour augmenter ses chances de trouver la solution, et l'on passe dès que possible au propre pour proposer une solution rédigée avec précision et bien présentée.

On ne "cultive" pas le brouillon pour la raison simple que... ce n'est pas lui qui sera noté !

♣ \Rightarrow De ne jamais rester bloqué plus de 15 minutes sans découvrir une piste raisonnable à tester. Il faut lire la solution dès que l'on rencontre un blocage, et la comprendre, ce qui constitue un "travail mathématique" à part entière, et déjà difficile.

Sécher pendant des heures est fort louable (pour la beauté du geste!) mais inutile lorsqu'on prépare un concours où chaque minute est comptée : il faut faire des progrès et apprendre quelque chose heure après heure!

On se permet de jeter un coup d'oeil à la solution dès qu'on ne trouve plus d'idée à exploiter au brouillon. On lit alors le début de la solution proposée, et si cela suffit pour avoir de nouvelles idées, on retourne travailler au brouillon. Sinon on lit la solution en entier.

On tiendra le plus grand compte de son moral, et l'on n'attendra pas d'être complètement découragé pour lire la solution. Cela ne sert à rien :

Le but de l'entraînement est d'accomplir des progrès réels, d'apprendre sans cesse, et non de se décourager devant une question!

Si l'on n'a vraiment pas envie de rechercher la solution d'un exercice ou si l'on ressent que se lancer dans une recherche demande trop d'efforts (cela arrive plus fréquemment qu'on le dit), plutôt que de laisser tomber, je conseille de se contenter de lire la solution et de la comprendre. C'est ainsi que l'on fait des progrès envers et contre tout, et ce coup de pouce peut permettre de rentrer à nouveau dans l'exercice en question (mais cet objectif est secondaire : le but est d'apprendre toujours plus, sans se martyriser). Voilà l'intérêt de travailler sur des banques d'exercices corrigés!

♣ \Rightarrow **De rédiger au moins une question sur trois en entier** sur une feuille spécialement sortie à cet effet... et avec le stylo que l'on utilisera *effectivement* le jour du concours.

La rédaction et la présentation sont *capitales*! On est noté à partir de la copie qu'on remet à la fin de l'épreuve, et celle-ci doit être lisible, bien écrite, sans fautes d'orthographe, avec toute la ponctuation nécessaire, des majuscules en début de phrase et des accents là où il faut!

Sans exagérer : peut-on déceimment accepter un candidat qui n'écrit aucune majuscule en début de phrase, ne marque aucun accent, pour ensuite le placer seul devant une classe où il devra montrer l'exemple à plusieurs générations d'élèves?

Nous serons tous parents : que penserons-nous d'un professeur qui écrit de façon illisible au tableau, en laissant de nombreuses fautes d'orthographe?

Ne pas se plier à l'obligation de bien calligraphier et de bien présenter sa copie... doit être considéré comme "éliminatoire" dans un concours de recrutement de professeurs...

Après suffisamment d'entraînement, une fois que vous êtes certains de pouvoir passer facilement de votre brouillon minimal au propre, il ne devient plus nécessaire de rédiger tous les exercices que vous avez cherchés, et il suffit de

le faire seulement de temps en temps pour ne pas perdre la main. Travailler uniquement au brouillon permet dans ce cas de traiter et de survoler un plus grand nombre d'exercices. Mais cela ne peut être que le résultat d'un choix stratégique mûrement réfléchi.

♣ ⇒ **De toujours lire la solution proposée en entier**, que l'exercice ait été résolu avec facilité ou pas. On le fait naturellement si l'on est bloqué par une question, mais il est conseillé de le faire *dans tous les cas*.

En "survolant" rapidement les passages que l'on a soi-même trouvés et rédigés, il convient de repérer toute solution proposée qui serait différente de la sienne :

- pour découvrir d'autres façons de penser et de réagir,
- pour avoir d'autres idées à exploiter dans les futurs entraînements,
- pour disposer de différentes "roues de secours" le jour J.

Bref, on lit les solutions proposées et les remarques pour faire des progrès !

♣ ⇒ **De commencer par les bons exercices** : Les deux Sections suivantes proposent un classement et des commentaires des exercices et des problèmes du recueil. Bien que forcément partial, ce classement n'est pas inutile puisqu'il peut aider le lecteur à aller à l'essentiel sans se décourager au sujet du superflu.

♣ ⇒ **De ne pas perdre de temps** : Le temps, c'est de l'argent, dit-on. C'est plus que cela quand on prépare un concours : le temps file, les jours passent et chaque heure d'entraînement doit nous permettre de faire des progrès réels.

L'objectif est clair : apprendre, réviser, apprendre à réinvestir ses connaissances et à les utiliser au bon moment, et finalement s'entraîner à la recherche et à la rédaction rapide et complète d'un problème. Il faut :

- penser "profit" : chaque heure d'entraînement doit nous apprendre quelque chose d'important.

- travailler les "fondamentaux" en grande priorité. Ce sont eux qui serviront de moteur pour nous permettre de résoudre des problèmes, et bien les connaître nous laisse disposer d'un "bagage standard du candidat au concours". Par exemple, bien connaître les isométries affines de l'espace donne un bonus important dès qu'on aborde n'importe quel problème concernant les isométries le jour du concours : on dira moins de bêtises, on aura beaucoup d'idées géométriques pour chercher une solution, et on pourra utiliser, si nécessaire, une "liste d'isométries connues" pour arriver à ses fins. N'est-ce pas un avantage considérable ?

Un exemple récent nous est donné par la Partie V de la seconde composition du CAPES externe 2007, partie que l'on pouvait pratiquement traiter en une heure (exception faite de la dernière question qui dépendait d'une autre partie) si l'on avait déjà étudié les groupes diédraux en cours ou à l'occasion de la leçon d'oral sur les isométries d'un polygone régulier. Cette partie n'utilisait que des fondamentaux sur les isométries planes, les groupes d'isométries laissant un ensemble globalement invariant et les groupes en général (par exemple : l'expression des éléments du sous-groupe engendré par une partie).

Pour atteindre cet objectif, il convient de ne pas rester des heures sur un problème sans avancer ni lire la solution proposée.

Rester 5 heures ou plus devant un problème sans lire la solution ne peut être envisagé qu'à des fins d'entraînement en situation réelle du concours, pour avoir une idée précise d'un travail en temps limité, pour s'habituer à utiliser ses connaissances (à une date donnée) avec un rendement maximum, et pour savoir si le matériel que l'on a prévu pour passer l'épreuve est opérationnel (stylos que l'on aime utiliser, calculatrice en état de marche, règle, compas, rapporteur... sans oublier les boules kiès qui permettront de continuer de se concentrer dans une atmosphère bruyante.).

Pour *accomplir des progrès réels en fonction du temps investi dans sa préparation*, et profiter de toutes les minutes dédiées à son entraînement :

Il est essentiel de conserver son moral intact, au beau fixe, et de "pulvériser" les exercices de ce recueil de n'importe quelle manière.

On peut par exemple :

- chercher une solution personnelle au brouillon, puis la confronter avec la solution proposée,
- chercher une solution personnelle au brouillon, puis la rédiger complètement avant de comparer avec la solution proposée,
- se contenter de lire la solution en la comprenant (si l'on ne trouve pas comment débiter un exercice au bout de 5 minutes ou si l'exercice ne nous motive pas),
- lire le début de la solution, interrompre dès qu'on a compris la méthode pour se remettre à progresser au brouillon, puis lire à nouveau la solution dès qu'on rencontre un blocage ; cela autant de fois que nécessaire.

0.3 Commencer par les bons exercices !

♣ \Rightarrow **Des apprentissages fondamentaux** : Il convient d'insister sur les *apprentissages fondamentaux*. Pour cela, on commencera par traiter tous les exercices et problèmes présentés en "priorité A", soit très prioritaires, dans le tableau ci-dessous.

On abordera les autres exercices seulement lorsque tous les exercices de "priorité A" auront été traités, pour peaufiner sa préparation et s'entraîner un peu plus, en commençant par ceux de "priorités B ou C", et en conservant les exercices difficiles pour la "finition", en sachant qu'on peut finalement les laisser de côté si d'autres thèmes du concours doivent être travaillés au niveau "fondamental".

Le but est de privilégier l'entraînement à la recherche et à la rédaction sur des questions que l'on peut raisonnablement aborder en temps limité sans hypothéquer le reste de l'épreuve.

♣ \Rightarrow **Une classification des exercices** : Je reproduis à la page 13 les tableaux déjà présents dans le premier volume d'exercices. Dans ceux-ci, l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne correspond à l'exercice (ou au problème) $n^{\circ}ij$ (en base 10), et les symboles doivent être interprétés en utilisant la légende suivante :

Légende de la Classification "Croix de fer" $\boxtimes ABCD\mathcal{R}$

\boxtimes = Difficile. Exercice difficile réservé à l'approfondissement et à éviter en première lecture. On réussit au concours sans avoir nécessairement travaillé ce type d'exercices. Il s'agit d'un challenge, d'un surcroît de difficulté destiné à s'endurcir. A utiliser seulement quand on est en forme, en s'autorisant à lire la solution dès qu'aucune piste n'apparaît ou que le moral baisse. Attention : *il faut cultiver son moral*. L'objectif principal est d'accomplir des "progrès réels", et non de "faire semblant d'atteindre un niveau", ou de perdre son temps sur des exercices abscons. Le moral est indispensable pour avancer et continuer à investir dans la préparation : il faut donc le conserver.

A = Priorité A. Exercice basique et essentiel, à traiter en priorité et à comprendre entièrement ! Il s'agit de notions fondamentales à connaître sur le bout des doigts.

B = Priorité B. Exercice d'entraînement qui permet d'utiliser ses connaissances à bon escient, d'apprendre à réagir, d'utiliser

des résultats du cours. Il faut que cela tourne et l'on acquiert des réflexes et des automatismes.

C = Priorité C. Exercice assez difficile, intéressant mais qui commence à devenir vraiment élaboré ! On parfait son entraînement à l'écrit. On vise plus haut. Il est conseillé de laisser ces exercices de côté tant que les exercices de type A ou B n'ont pas tous été travaillés, sauf si l'on dispose de suffisamment de temps avant l'écrit du concours et que l'on désire varier le niveau de difficulté, ou "s'amuser" un peu.

D = Priorité D. Exercice difficile, à traiter seulement si le temps restant dévolu à la préparation le permet, et si l'on est à l'aise avec les exercices de priorités A ou B. On peut aussi se lancer dans un tel exercice à n'importe quel moment pour se faire plaisir.

Un bon plan : réfléchir au plus 5 minutes sur chacune des questions, puis suivre une piste au brouillon si une piste s'offre à nous, sinon lire la solution et la comprendre. Si aucune idée ne vient pour démarrer, ou si l'on a seulement envie de refermer le livre et de "tout laisser tomber", il faut lire la solution et la comprendre. Lire et comprendre une solution rédigée constitue un exercice mathématique à part entière : on découvre un raisonnement et on fait des progrès. On ouvre son esprit. Enfin, on n'hésitera pas à faire seulement un "survol de la solution" si celle-ci coûte trop. Bref : on ouvre son esprit sans perdre inutilement du temps et en conservant un moral d'enfer.

\oslash = Oral. Cet exercice est suffisamment sympathique et court pour être mémorisé et réutilisé dans des épreuves orales, en tant qu'application, exercice, remarque, ou théorème.

\mathcal{R} = Oral. Cet exercice est à connaître pour répondre aux questions d'un jury d'oral.

♣ \Rightarrow **En résumé** : Entrez dans le vif du sujet en commençant par traiter tous les exercices du type A, puis ceux du type B, et enfin ceux du type C. L'essentiel est alors atteint. Après, *si vous en avez envie et si vous avez bon moral*, vous pourrez attaquer des exercices du type D, des "Croix de Fer" ✘, ou utiliser des problèmes complets d'Annales de concours avec leurs parties difficiles.