Table des matières

Avant-propos

Le 13 mars 2006, un candidat m'a fait le commentaire suivant : « J'ai beaucoup apprécié votre livre "Annales 2005 " pour la grande diversité des solutions proposées ainsi que pour les différentes extensions qui permettent d'avoir une vision plus étendue des problèmes posés. »

Evidemment, ce type de commentaire me fait très plaisir ! Selon moi, un livre d'annales doit dépasser la seule présentation rapide des solutions aux questions posées, et constituer un véritable outil de préparation au concours. Cet outil doit être adapté à tous ceux qui choisissent une incidence « Annales » pour préparer leur concours, avec raison et en accord avec leur sensibilité.

Il s'agit alors

a) de travailler les questions avec un brouillon ;

b) de rédiger la solution « au propre » et « pour de vrai » en utilisant son stylo favori, la règle et les outils de tracé que l'on aura vraiment avec soi le jour J, et bien sûr, sa calculatrice. On proposera une rédaction au moins une fois sur trois pour vérifier que l'on est capable de partir de son brouillon, qui doit être « sommaire » sauf si l'on n'a pas pu faire autrement, pour aboutir à un « produit fini » proprement rédigé et disposé ;

c) et enfin de comparer avec la solution proposée.

Je ne conseille de ne jamais passer plus de 5 minutes à rechercher une piste de solution sans rien trouver, car c'est une perte de temps lorsque l'objectif principal est de réussir au concours. Je conseille donc de lire tout simplement la solution dès que l'on « sèche » plus de 5 minutes, et en fait dès que l'on sent que son moral défaille et que l'on a plus qu'une envie : celle de refermer le livre et de faire autre chose. Cela arrive très souvent (je le dis en connaissance de cause), on n'en parle pas beaucoup mais c'est en fait quelque chose de tout à fait naturel. Comment peut-on s'intéresser à un problème sur lequel on bute ? S'il s'agit de rechercher une solution « pour le plaisir » ou pour répondre à une attente particulière, pourquoi pas ? Mais quand il s'agit d'apprendre du neuf et

[0] cmonannales2006 v1.00

d'apprendre à réagir sur les questions posées, quelle est l'utilité ? L'important n'est-il pas de retirer quelque avantage de la moindre minute que l'on passera à s'entraîner à « faire des mathématiques » sur le programme du concours ?

Toute séance d'entraînement doit apporter
une connaissance ou un savoir faire.

La pire des choses qui puisse arriver - compte tenu de notre objectif de préparation au concours, et son corollaire : réaliser le maximum de progrès en un temps limité - serait d'être tellement « barbé » par les questions sur lesquelles « on se frotte », que l'on soit amené à baisser les bras et que l'on referme le livre pour vaquer à autre chose.

C'est ici et maintenant que l'on a la possibilité d'apprendre quelque chose : apprendre un savoir ou un savoir-faire. C'est en lisant la solution, et en essayant de la comprendre, que l'on pourra se remettre en selle, et surtout, que l'on apprendra du neuf.

La lecture d'un texte mathématique est un travail en soi, qui demande de l'attention, de la mémoire et de l'intelligence, et qu'il faut se garder de sous-estimer. Il s'agit d'un travail mathématiques à part entière. Il est étonnant de voir que lire un article de recherche est considéré comme un travail mathématique difficile, mais qu'à l'opposé, on déconseille souvent de lire une solution sans l'avoir cherché pendant des heures, en prétextant que l'on ne retient vraiment que ce que l'on a cherché. Pour ma part, il y a des tas de choses que j'ai cherchées et recherchées, et que j'oublie régulièrement.
Par contre, il existe des lectures qui marquent énormément et laissent un sillon profond : ce peut être une méthode pour découvrir les caractéristiques géométriques d'une conique, la preuve que deux bissectrices d'un triangle se coupent réellement, ou bien la subtilité de l'utilisation des congruences dans le crypto-système RSA... Et ce sont autant de connaissances que l'on est susceptible de retrouver et d'utiliser dès qu'on les a lues !

Lisons donc et apprenons ! Pour cela, il nous faut :

- **des annales développées** qui, à certains moments, n'hésitent pas à proposer plusieurs méthodes de résolution : il y a alors plus de chance pour que l'une de ces méthodes marque le cerveau, suivant la sensibilité et le passé mathématique de chacun, et revienne à l'esprit au moment opportun.

- **des annales commentées**, où l'on peut lire quelques conseils méthodologiques, où l'on signale des prolongements, où l'on peut inscrire des « métadonnées » concernant la résolution du problème et les réactions, saines ou non, que l'on peut avoir devant une question particulière, où l'on signale les questions importantes et classiques qu'il faut absolument travailler et qui peuvent aider pour l'oral (car oui : nous préparons aussi l'oral quand nous nous entraînons à l'écrit... les mathématiques ne forment-elles pas un ensemble cohérent et accessible tant à l'oral qu'à l'écrit ?).

- **des annales augmentées**, où l'on se permet de démontrer aussi précisément que possible des résultats utilisés dans la solution et qui ne font l'objet que d'un bref rappel sur la copie à remettre, mais dont il faut être sûr de bien connaître la nature.

Un exemple simple ? Au moment où j'écris ces lignes, je résous la question III.2.a de la seconde composition du CAPES externe 2006, et un résultat joue un rôle essentiel :

> « *Une application affine bijective transforme une conique en une conique de même type* ».

La solution de cette question prend trois petites lignes quand on utilise ce résultat, et c'est bien ce que l'on fera lorsqu'on sera en situation et dans l'obligation de gagner le plus de points possibles en temps limité.

Mais un tel résultat est important à connaître, pourrait être ré-utilisé à l'oral, et se trouve à la portée du candidat si celui-ci possède déjà quelques notions sur les coniques. Un preuve détaillée de ce résultat est donc un atout qui permet un approfondissement immédiat sur les coniques. C'est d'ailleurs une bonne occasion de répondre à la question shakespearienne : « qu'est-ce qu'une conique ? » qui risque à tout moment d'être posée à l'oral, et sur laquelle il vaut mieux avoir des idées précises ! Je rajoute donc un complément qui donne les moyens de réfléchir très précisément sur cette question.

J'ai décidé de faire des efforts pour que de simples annales deviennent un véritable outil d'apprentissage, et je suis heureux de m'apercevoir que des lecteurs ont compris et apprécié cette façon de voir.

Un tel commentaire ne peut donc pas me laisser de marbre.

Pointe-à-Pitre, le 2 mai 2006

Dany-Jack Mercier

Chapitre 1

CAPES interne

1.1 Énoncé

Problème 1

Notations

Dans le problème, pour toute fonction h définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note h' sa fonction dérivée.
On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$, dérivables sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(0) = f(1) = 0$;
- f' est dérivable sur $[0,1[$ et on note f'' sa fonction dérivée ;
- $\forall x \in [0,1[\,,\ f'(x) \geq 0$;
- $\forall x \in [0,1[\,,\ f''(x) \geq 0$.

Pour toute fonction f de $\mathbf{E}$, on note :

- $\widetilde{f}$ la fonction associée à f, définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $\widetilde{f}(x) = x - f(x)$;
- $I(f)$ le réel défini par $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \widetilde{f}(x)\,dx = 2\int_0^1 (x - f(x))\,dx$.

$I(f)$ est appelé l'indice de Gini de f.

On admettra que si une fonction f continue sur l'intervalle $[0,1]$ est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle $]0,1[$, il en est de même sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie I : Étude de quelques éléments de E

1. Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :
$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)$$
où λ est le nombre réel tel que $f(1) = 1$.

   1.1 Préciser la valeur de λ.

   1.2 Démontrer que f est un élément de **E**.

   1.3 Démontrer que pour tout x appartenant à $[0,1]$: $x - f(x) \geq 0$.

   1.4 Dresser le tableau de variation de f. On précisera les valeurs exactes prises par f' en 0 et 1.

   1.5 Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

   1.6 *Application économique. On peut considérer que la fonction f rend compte de la concentration des richesses des habitants d'un pays donné. Par exemple, $f(0.3) \approx 0.19$ signifie que 30% des habitants (les plus pauvres) possèdent environ 19% des richesses du pays. Dans ces conditions, l'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses dans ce pays.*
   Calculer l'indice de Gini pour le pays considéré. En donner une interprétation graphique.

2. Soit n un entier naturel strictement positif et f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n$.

   2.1 Démontrer que f_n est un élément de **E**.

   2.2 Calculer $I(f_n)$.

   2.3 Démontrer que la suite $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

3. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et g_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :
$$g_n(x) = 1 - (1-x)^{\frac{1}{n}}.$$

   3.1 Démontrer que g_n est un élément de **E**.

   3.2 Calculer $I(g_n)$. Comparer $I(f_n)$ et $I(g_n)$ pour tout entier naturel $n > 1$.

3.3 Dans cette question, on suppose $n = 2$.

3.3.1 Résoudre dans l'intervalle $]0,1[$ l'équation $f_2(x) = g_2(x)$.

3.3.2 Justifier le sens de variation des fonctions f_2 et g_2.

3.3.3 Donner sous la forme d'un tableau les valeurs de $f_2\left(\frac{p}{10}\right)$ et les arrondis au centième de $g_2\left(\frac{p}{10}\right)$ pour p entier compris entre 0 et 10.

3.3.4 Tracer les courbes représentatives de f_2 et de g_2 dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

3.3.5 Donner une interprétation graphique de la relation qui existe entre $I(f_2)$ et $I(g_2)$.

3.3.6 Dans le cas où f_2 et g_2 rendent compte de la concentration des richesses des habitants de deux pays différents, que vaut l'indice de Gini pour chacun de ces deux pays ? Dans ce cas, l'indice de Gini vous semble-t-il signifiant ?

Partie II : Quelques propriétés de la fonction $\widetilde{f}$

On considère dans cette partie, une fonction f élément de $\mathbf{E}$ et $\widetilde{f}$ la fonction associée à f.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $[0,1]$: $\widetilde{f}(x) \leq x$.
2. Dans cette question on étudie la fonction $\widetilde{f}'$ dérivée de $\widetilde{f}$.

   2.1 Étudier le sens de variation de la fonction $\widetilde{f}'$ sur $[0,1[$.

   2.2 Démontrer que si l'on suppose que, pour tout x appartenant à $]0,1[$, $\widetilde{f}'(x) < 0$, on aboutit à une impossibilité.
   De même, démontrer que si l'on suppose que, pour tout x appartenant à $]0,1[$, $\widetilde{f}'(x) > 0$, on aboutit à une impossibilité.

   2.3 En déduire qu'il existe un élément x_0 de $]0,1[$ tel que $\widetilde{f}'(x_0) = 0$.

3. Démontrer que $\widetilde{f}'(0)$ est égal à 0 si et seulement si la fonction $\widetilde{f}$ est nulle sur $[0,1]$. Que peut-on dire alors de la fonction f ?
4. On suppose dans cette question que $\widetilde{f}'(0) \neq 0$.

   4.1 Étudier le signe de $\widetilde{f}'$ sur $[0,1[$ et préciser les variations de $\widetilde{f}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

   4.2 Justifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0,1[$: $\widetilde{f}(x) > 0$.

   4.3 En déduire que la fonction $\widetilde{f}$ admet sur $[0,1]$ un maximum, strictement positif, atteint en x_0.

Partie III : Quelques propriétés de l'indice de Gini

Les résultats de la partie **II** *pourront être utilisés pour résoudre les questions de la partie* **III**.

Dans toute cette partie, f désigne toujours une fonction de $\mathbf{E}$ et $\widetilde{f}$ la fonction associée à f.

1. Démontrer que $I(f) \geq 0$.
2. Démontrer que $I(f) \leq 1$.
3. Dans cette question, on veut démontrer que $I(f) < 1$.

   3.1 Prouver que, pour tout réel α appartenant à $[0, 1[$, on a :

   $$\int_0^1 f(x)\, dx \geq f(\alpha)(1-\alpha).$$

   3.2 Démontrer que la condition $f(1) = 1$ implique l'existence d'un réel α_0 de l'intervalle $]0, 1[$ tel que $f(\alpha_0) \geq \frac{1}{2}$.

   3.3 En déduire que $I(f) < 1$.

4. À l'aide de la question **2.3.** de la partie **I**, démontrer que, quel que soit le réel $A < 1$, on peut trouver une fonction f de $\mathbf{E}$ telle que $I(f) > A$.
5. Dans cette question, on suppose que $\widetilde{f}'(0) \neq 0$ et on considère x_0 appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\widetilde{f}'(x_0) = 0$.
   On note φ la fonction numérique de la variable x définie sur l'intervalle $[0, x_0]$ par :

   $$\varphi(x) = \widetilde{f}(x) - M\frac{x}{x_0}$$

   où $M = \widetilde{f}(x_0)$.

   5.1 Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(x_0)$.

   5.2 Justifier que $\varphi'(x_0) < 0$ et que φ' s'annule sur l'intervalle $[0, x_0]$.

   5.3 En déduire, pour tout x de l'intervalle $[0, x_0]$, $\widetilde{f}(x) \geq M\frac{x}{x_0}$.
   Par un raisonnement analogue, on peut établir le résultat suivant que nous admettrons :

   $$\forall x \in [x_0, 1], \quad \widetilde{f}(x) \geq M\frac{x-1}{x_0-1}.$$

   5.4 En déduire que $I(f) \geq M$.